Generalizări şi rafinări ale unei inegalități

de Daniela Macovei şi Ion Bursuc

Motto:*Aceasta este porunca Mea :Să vă iubiți unul pe altul,precum v-am iubit Eu(IOAN,cap. 15,v.12)*

În cele ce urmează vom da mai multe soluții ale inegalității (1) urmate de generalizări , rafinări şi aplicații.

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x| \le 1, |y| \le 1$ are loc

inegalitatea: $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2} \le \sqrt{4-(x+y)^2}$ (1) .

Soluția 1(algebrică)

Ridicând ambii membri ai inegalității (1) la puterea a doua aceasta devine:

$$1-x^2+1-y^2+2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} \le 4-(x+y)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \le 2(1-xy) \Leftrightarrow$$

$$(1-x^2)(1-y^2) \le (1-xy)^2 \Leftrightarrow 1-x^2-y^2+x^2y^2 \le 1-2xy+x^2y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0 .$$

Soluția 2(folosind inegalitatea lui Cauchy-Schwarz)

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2} = 1\cdot\sqrt{1-x^2}+1\cdot\sqrt{1-y^2} \le \sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1-x^2+1-y^2} =$$

$$\sqrt{4-2(x^2+y^2)} \le \sqrt{4-(x+y)^2}.$$

Soluția 3(trigonometrică)

Există $a, b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x = \sin a, y = \sin b, \cos a \ge 0, \cos b \ge 0$ .Inegalitatea (1) devine:

$$\cos a+\cos b \le \sqrt{4-(\sin a+\sin b)^2} \Leftrightarrow$$

$$(\cos a+\cos b)^2 \le 4-(\sin a+\sin b)^2 \Leftrightarrow 2+2\cos(a-b) \le 4 \Leftrightarrow \cos(a-b) \le 1 .$$

Soluția 4(funcții convexe)

Fie funcția $f : [-1,1] \to R, f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .Funcția f este derivabilă de două ori pe intervalul $(-1,1)$ şi $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x) = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} < 0, (\forall) x \in (-1,1)$,deci

funcția f este concavă.Are loc inegalitatea

$f(x)+f(y) \le 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$,adică $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2} \le \sqrt{4-(x+y)^2}$.

Rafinare

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1, |y| < 1$ are loc

inegalitatea: $\sqrt{4-(x+y)^2}-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2} \ge \frac{(x-y)^2}{4(1-xy)}$.

Demonstrație

Prin amplificări succesive obținem:

$$\sqrt{4-(x+y)^2}-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{4-(x+y)^2}-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}\right)\left(\sqrt{4-(x+y)^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\right)}{\sqrt{4-(x+y)^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}}=$$

$$\frac{2\left(1-xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)}{\sqrt{4-(x+y)^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}}=$$

$$\frac{2\left(1-xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)\left(1-xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)}{\left(\sqrt{4-(x+y)^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\right)\left(1-xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)}=$$

$$\frac{2(x-y)^2}{\left(\sqrt{4-(x+y)^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\right)\left(1-xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)}\geq\frac{2(x-y)^2}{4(1-xy+1-xy)}=\frac{(x-y)^2}{4(1-xy)}$$

Generalizarea 1

Dacă $a,b>0,x,y\in[-1,1]$,atunci are loc inegalitatea:

$$a\sqrt{1-x^2}+b\sqrt{1-y^2}\leq\sqrt{(a+b)^2-(ax+by)^2}\ .$$

Demonstrație

Ridicând ambii membri ai inegalității la puterea a doua ,aceasta devine:

$$a^2-a^2x^2+b^2-b^2y^2+2ab\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\leq(a+b)^2-(ax+by)^2\Leftrightarrow 2ab\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\leq$$

$$2ab-2abxy\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\leq 1-xy\Leftrightarrow(1-x^2)(1-y^2)\leq(1-xy)^2\Leftrightarrow$$

$$1-x^2-y^2+x^2y^2\leq 1-2xy+x^2y^2\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0.$$

Rafinarea inegalității de la generalizarea 1

Pentru orice $a,b>0,x,y\in\mathbb{R}$ cu $|x|<1,|y|<1$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(a+b)^2-(ax+by)^2}-a\sqrt{1-x^2}-b\sqrt{1-y^2}\geq\frac{ab(x-y)^2}{2(a+b)(1-xy)}\ .$$

Demonstrație

Prin amplificări succesive obținem: $\sqrt{(a+b)^2-(ax+by)^2}-a\sqrt{1-x^2}-b\sqrt{1-y^2}=$

$$=\frac{\left(\sqrt{(a+b)^2-(ax+by)^2}-a\sqrt{1-x^2}-b\sqrt{1-y^2}\right)\left(\sqrt{(a+b)^2-(ax+by)^2}+a\sqrt{1-x^2}+b\sqrt{1-y^2}\right)}{\sqrt{(a+b)^2-(ax+by)^2}+a\sqrt{1-x^2}+b\sqrt{1-y^2}}=$$

$$\frac{2ab\left(1-xy-\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right)}{\sqrt{(a+b)^2-(ax+by)^2}+a\sqrt{1-x^2}+b\sqrt{1-y^2}}=$$

$$\frac{2ab\left(1-xy-\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right)\left(1-xy+\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right)}{\left(\sqrt{(a+b)^2-(ax+by)^2}+a\sqrt{1-x^2}+b\sqrt{1-y^2}\right)\left(1-xy+\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right)}=$$

$$\frac{2ab(x-y)^2}{\left(\sqrt{(a+b)^2-(ax+by)^2}+a\sqrt{1-x^2}+b\sqrt{1-y^2}\right)\left(1-xy+\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right)}\geq$$

$$\frac{2ab(x-y)^2}{2(a+b)(1-xy+1-xy)}=\frac{ab(x-y)^2}{2(a+b)(1-xy)}.$$

Generalizarea 2

a)Dacă $a_1,a_2,...,a_n>0, x_1,x_2,...,x_n\in[-1,1], r\in\mathbb{N}, r\geq 2$ număr par,atunci are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sqrt[r]{1-x_k{}^r}\leq\sqrt[r]{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^r-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)^r}.$$

b) Dacă $a_1,a_2,...,a_n>0, x_1,x_2,...,x_n\in[0,1], r\in\mathbb{N}, r\geq 3$ număr impar,atunci are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sqrt[r]{1-x_k{}^r}\leq\sqrt[r]{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^r-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)^r}.$$

Demonstrație

Se consideră funcția $f:[-1,1]\to R, f(x)=\sqrt[r]{1-x^r}$ .Funcția *f* este derivabilă de două ori pe intervalul $(-1,1)$ şi

$$f'(x)=\frac{-x^{r-1}}{\sqrt[r]{\left(1-x^r\right)^{r-1}}}, \; f''(x)=\frac{-(r-1)x^{r-2}}{\sqrt[r]{\left(1-x^r\right)^{2r-1}}}.$$

a)În acest caz funcția *f* este concavă pe intervalul $[-1,1]$ .Folosind inegalitatea lui Jensen $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_1+a_2+...+a_n}f(x_k)\leq f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_1+a_2+...+a_n}x_k\right)$ se deduce inegalitatea din enunț.

b)În acest caz funcția *f* este concavă pe intervalul $[0,1]$.

Consecință

a)Dacă $a,a_1,a_2,...,a_n>0, x_1,x_2,...,x_n\in[-a,a], r\in\mathbb{N}, r\geq 2$ număr par,atunci are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sqrt[r]{a^r-x_k{}^r}\leq\sqrt[r]{\left(a\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^r-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)^r}.$$

b) Dacă $a, a_1, a_2, ..., a_n > 0, x_1, x_2, ..., x_n \in [0, a], r \in \mathbb{N}, r \geq 3$ număr impar,atunci are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt[r]{a^r - x_k{}^r} \leq \sqrt[r]{\left(a \sum_{k=1}^{n} a_k\right)^r - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^r} .$$

<u>Aplicații</u>

<u>A1</u> . Dacă $x, y \in [-1,1]$,atunci are loc inegalitatea:

$$2\sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{1-y^2} \leq \sqrt{25-(2x+3y)^2} .$$

<u>A2</u> . Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1, |y| < 1$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt{25-(2x+3y)^2} - 2\sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{1-y^2} \geq \frac{3(x-y)^2}{5(1-xy)} .$$

<u>A3</u> . Pentru orice $x, y \in [0,1]$ are loc inegalitatea: $\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{1-y^3} \leq \sqrt[3]{8-(x+y)^3}$.

<u>A4</u> . Pentru orice $x, y \in [-1,1]$ are loc inegalitatea: $\sqrt[4]{1-x^4} + \sqrt[4]{1-y^4} \leq \sqrt[4]{16-(x+y)^4}$.

<u>A5</u> . Pentru orice $x, y \in [-1,1]$ are loc inegalitatea: $\sqrt[4]{1-x^4} + \sqrt[4]{1-y^4} + \sqrt[4]{1-z^4} \leq \sqrt[4]{81-(x+y+z)^4}$.

Bibliografie

[1] Ion Bursuc,Metode folosite în demonstrarea inegalităților,Creații Matematice seria B,nr 1/2006.

[2] Ion Bursuc,Generalizări ale unor probleme date la concursuri,Editura Cygnus,2009.

[3] Mihai Onucu Drimbe,Inegalități idei şi metode,Editura GIL,2003.

profesori C.N.I.”Spiru Haret”,str.Zorilor,nr. 17,Suceava