

GENERALIZĂRI ALE UNOR PROBLEME CU PROGRESII ARITMETICE ¹⁾

de Otilia Parascan și Ion Bursuc

Motto: Așa să lumineze lumina voastră înaintea oamenilor, așa încât să vadă faptele voastre cele bune și să slăvească pe Tatăl vostru Cel din ceruri (Matei, cap.5, v.16).

În cele ce urmează vom generaliza unele probleme cu progresii aritmetice urmate de cazuri particulare semnificative.

Problema 1. Arătați că dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2, b^2 + bc + c^2$ sunt în progresie aritmetică.

Generalizare.

Fie numerele $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$8b_1 = 4a_1 + 2a_2 + a_3 + c_1, 8b_3 = a_3 + c_1 + 2c_2 + 4c_3, 4b_2 = a_2 + a_3 + c_1 + c_2$. Arătați

că dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele

$a_1a^2 + a_2ab + a_3b^2, b_1a^2 + b_2ac + b_3c^2, c_1b^2 + c_2bc + c_3c^2$ sunt în progresie aritmetică.

Soluție.

Din faptul că a, b, c sunt în progresie aritmetică deducem că $2b = a + c$ și

$$\begin{aligned} & 4 \left[(a_1a^2 + a_2ab + a_3b^2) + (c_1b^2 + c_2bc + c_3c^2) - 2(b_1a^2 + b_2ac + b_3c^2) \right] = 4a_1a^2 + \\ & + 2a_2a(a+c) + a_3(a+c)^2 + c_1(a+c)^2 + 2c_2c(a+c) + 4c_3c^2 - 8b_1a^2 - 8b_2ac - \\ & - 8b_3c^2 = a^2(4a_1 + 2a_2 + a_3 + c_1 - 8b_1) + c^2(a_3 + c_1 + 2c_2 + 4c_3 - 8b_3) + \\ & + ac(2a_2 + 2a_3 + 2c_1 + 2c_2 - 8b_2) = 0, \text{ de unde rezultă concluzia.} \end{aligned}$$

Problema 2.

a) Arătați că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a + b + c \neq 0$ și $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2, b^2 + bc + c^2$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică.

b) Arătați că dacă numerele $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfac relațiile $8b_1 = 4a_1 + 2a_2 + a_3 + c_1, 8b_3 = a_3 + c_1 + 2c_2 + 4c_3, 4b_2 = a_2 + a_3 + c_1 + c_2$ $a(a_3 + 2a_2 + c_1) + b(2a_3 + 2c_1) + c(a_3 + c_1 + 2c_2) \neq 0$ și numerele $a_1a^2 + a_2ab + a_3b^2, b_1a^2 + b_2ac + b_3c^2, c_1b^2 + c_2bc + c_3c^2$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică.

1) O variantă a acestui articol a fost prezentată la simpozionul internațional „Spiru Haret”, 2010.

Soluție.

Demonstrăm punctul b) care este generalizarea punctului a).

Fie $x = a + c - 2b$. Putem scrie

$$\begin{aligned}
 & 4 \left[(a_1 a^2 + a_2 ab + a_3 b^2) + (c_1 b^2 + c_2 bc + c_3 c^2) - 2(b_1 a^2 + b_2 ac + b_3 c^2) \right] = 4a_1 a^2 + \\
 & + 2a_2 a(a + c - x) + a_3 (a + c - x)^2 + c_1 (a + c - x)^2 + 2cc_2 (a + c - x) + 4c_3 c^2 - \\
 & - 8b_1 a^2 - 8b_2 ac - 8b_3 c^2 = a^2 (4a_1 + 2a_2 + a_3 + c_1 - 8b_1) + c^2 (a_3 + c_1 + 2c_2 + 4c_3 - 8b_3) + \\
 & + ac(2a_2 + 2a_3 + 2c_1 + 2c_2 - 8b_2) - 2x(a_2 a + a_3 a + a_3 c + c_1 a + c_1 c + cc_2) + \\
 & + x^2(a_3 + c_1) = x \left[x(a_3 + c_1) - 2a_2 a - 2a_3 a - 2a_3 c - 2c_1 a - 2c_1 c - 2cc_2 \right] = \\
 & = x(a_3 a + a_3 c - 2a_3 b + c_1 a + c_1 c - 2c_1 b - 2a_2 a - 2a_3 a - 2a_3 c - 2c_1 a - 2c_1 c - 2cc_2) = \\
 & = -x \left[a(a_3 + 2a_2 + c_1) + b(2a_3 + 2c_1) + c(a_3 + c_1 + 2c_2) \right] = 0 \Rightarrow \\
 & x = 0 \Rightarrow a, b, c \text{ sunt în progresie aritmetică.}
 \end{aligned}$$

Problema 3.

Dacă numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele

$$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c} \text{ sunt în progresie aritmetică.}$$

Generalizare.

Fie α, β, γ în progresie aritmetică. Arătați că dacă numerele $\gamma a^2, \beta b^2, \alpha c^2$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele $\frac{\alpha}{a+b}, \frac{\beta}{a+c}, \frac{\gamma}{b+c}$ sunt în progresie aritmetică.

Soluția 1.

Numerele $\frac{\alpha}{a+b}, \frac{\beta}{a+c}, \frac{\gamma}{b+c}$ sunt în progresie aritmetică dacă

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha}{a+b} + \frac{\gamma}{b+c} - \frac{2\beta}{a+c} = 0 \Leftrightarrow \alpha(b+c)(a+c) + \gamma(a+b)(a+c) - 2\beta(a+b)(b+c) = \\
 & = 0 \Leftrightarrow \alpha(ab+bc+ac+c^2) + \gamma(a^2+ac+ab+bc) - 2\beta(ab+ac+b^2+bc) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (ab+bc+ac)(\alpha+\gamma-2\beta) + \alpha c^2 + \gamma a^2 - 2\beta b^2 = 0
 \end{aligned}$$

care este o relație adevărată.

Soluția 2.

Calculăm

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{a+b} + \frac{\gamma}{b+c} - \frac{2\beta}{a+c} &= \frac{\alpha}{a+b} + \frac{\gamma}{b+c} - \frac{\alpha+\gamma}{a+c} = \alpha \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} \right) + \gamma \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c} \right) = \\ &= \frac{\alpha(c-b)}{(a+b)(a+c)} + \frac{\gamma(a-b)}{(b+c)(a+c)} = \frac{1}{a+c} \left(\frac{\alpha(c-b)}{a+b} + \frac{\gamma(a-b)}{b+c} \right) = \\ &= \frac{\alpha(c^2-b^2) + \gamma(a^2-b^2)}{(a+b)(a+c)(b+c)} = \frac{\alpha c^2 + \gamma a^2 - 2\beta b^2}{(a+b)(a+c)(b+c)} = 0. \end{aligned}$$

Problema 4.

Dacă numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele

$$\frac{c}{a+b}, \frac{b}{a+c}, \frac{a}{b+c} \text{ sunt în progresie aritmetică.}$$

Generalizare.

Dacă $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ și numerele $\alpha a^2, \beta b^2, \gamma c^2$ cât și numerele α, β, γ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele $\frac{\gamma c}{a+b}, \frac{\beta b}{a+c}, \frac{\alpha a}{b+c}$ sunt în progresie aritmetică.

Soluție.

Numerele $\frac{\gamma c}{a+b}, \frac{\beta b}{a+c}, \frac{\alpha a}{b+c}$ sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} \frac{\gamma c}{a+b} + \frac{\alpha a}{b+c} - \frac{2\beta b}{a+c} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma c}{a+b} + \frac{\alpha a}{b+c} - \frac{(\gamma+\alpha)b}{a+c} = 0 \Leftrightarrow \gamma \left(\frac{c}{a+b} - \frac{b}{a+c} \right) + \\ &+ \alpha \left(\frac{a}{b+c} - \frac{b}{a+c} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma(ac+c^2-ab-b^2)}{(a+b)(a+c)} + \frac{\alpha(ac+a^2-bc-b^2)}{(b+c)(a+c)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{(a+c)} \left(\frac{\gamma(c-b)}{a+b} + \frac{\alpha(a-b)}{b+c} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{(a+c)(a+b)(b+c)} \cdot \\ &\cdot [\gamma(c^2-b^2) + \alpha(a^2-b^2)] = 0, \text{ relație adevărată deoarece} \\ &\gamma(c^2-b^2) + \alpha(a^2-b^2) = \alpha a^2 + \gamma c^2 - (\alpha+\gamma)b^2 = \alpha a^2 + \gamma c^2 - 2\beta b^2 = 0. \end{aligned}$$