DOUĂ GENERALIZĂRI ALE UNEI INEGALITĂȚI [1)]

Franciuc Marcel şi Ion Bursuc

La olimpiada de matematică, etapa locală, Suceava 2009 la clasa a IX-a a fost dată următoarea problemă: Fie numerele $a,c>0$ şi $b\ge 0.$ Să se arate că $\frac{a}{b+c}+\frac{b\left(a+c\right)}{ac}+\frac{c}{a+b}\ge 2.$ Când are loc egalitatea?

Ilie Bălăşan, Fălticeni

Soluția 1:

Observăm că inegalitatea se poate scrie astfel: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a+b}\ge 2$ (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{c}+\frac{b+a}{a}+\frac{c}{a+b}\ge 4$ (2) $\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{c}+\frac{b+a}{a}+\frac{c}{a+b}\ge$ $\ge 4\sqrt[4]{\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c}\cdot\frac{b+a}{a}\cdot\frac{c}{a+b}}$ (3) inegalitate adevărată ce rezultă din inegalitatea mediilor $x_1+x_2+x_3+x_4\ge 4\sqrt[4]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}$ cu $x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$ şi egalitate $\Leftrightarrow$ cu $x_1=x_2=x_3=x_4.$ Se observă că egalitatea are loc dacă $b=0$ şi $a=c.$

Generalizare 1:

Dacă $\alpha,\beta,\gamma,\theta>0, a,c>0$ şi $b\ge 0,$ atunci $\alpha\frac{a}{b+c}+\frac{b\left(\beta a+\gamma c\right)}{ac}+\theta\frac{c}{a+b}\ge\ 4-\beta-\gamma,$ unde $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\theta=1.$ (4).

Soluție :

Inegalitatea se poate scrie astfel: $\alpha\frac{a}{b+c}+\frac{\beta\cdot b}{c}+\frac{\gamma\cdot b}{a}+\theta\frac{c}{a+b}\ge 4-\beta-\gamma$ (5) $\Leftrightarrow \alpha\frac{a}{b+c}+\frac{\beta\left(b+c\right)}{c}+\frac{\gamma\left(b+a\right)}{a}+\theta\frac{c}{a+b}\ge 4$ (6) $\Leftrightarrow \alpha\frac{a}{b+c}+\frac{\beta\left(b+c\right)}{c}+\frac{\gamma\left(b+a\right)}{a}+\theta\frac{c}{a+b}\ge$ $\ge 4\sqrt[4]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\theta\cdot\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c}\cdot\frac{b+a}{a}\cdot\frac{c}{a+b}}.$ Inegalitate adevărată.

Soluția 2:

Observăm că inegalitatea din enunț se mai poate scrie astfel:

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a+b}\right)\ge 2 \quad (7) \Leftrightarrow \frac{ac+b^2+bc}{c\left(b+c\right)}+\frac{ac+ab+b^2}{a\left(a+b\right)}\ge 2 \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{c\left(b+c\right)}+\frac{a+b}{b+c}+\frac{b^2}{a\left(a+b\right)}+\frac{b+c}{a+b}\ge 2 \ (9) \Leftrightarrow b^2\left(\frac{1}{c\left(b+c\right)}+\frac{1}{a\left(a+b\right)}\right)+\frac{\left(a+b-b-c\right)^2}{\left(b+c\right)\left(a+b\right)}\ge 0.$$

Se observă că egalitatea are loc dacă $b=0$ şi $a=c.$

1) O variantă a acestui articol a fost prezentată la simpozionul internațional „Spiru Haret”,2009.

Generalizare 2:

Arătați că dacă pentru $\alpha, \beta, a, c > 0$ şi $b \geq 0,$ atunci are loc inegalitatea:

$\frac{a}{b+\beta c} + \frac{b(\alpha a + \beta c)}{\beta ac} + \frac{\beta c}{a + \alpha b} \geq 2.$ Când are loc egalitatea?

Soluție:

Inegalitatea se poate scrie astfel: $\frac{a}{b+\beta c} + \frac{\alpha b}{\beta c} + \frac{\beta c}{a+\alpha b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad (10)$

$\Leftrightarrow \frac{\beta ac + \alpha b^2 + \alpha\beta bc}{\beta c(b+\beta c)} + \frac{\beta ac + ab + \alpha b^2}{a(a+\alpha b)} \geq 2 \ (11)$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha b^2}{\beta c(b+\beta c)} + \frac{\alpha b^2}{a(a+\alpha b)} + \frac{a+\alpha b}{b+\beta c} + \frac{b+\beta c}{a+\alpha b} \geq 2,$ (Adevărat). Egalitatea are loc dacă $b = 0$ şi $a = \beta c.$

Cazuri particulare: Fie $a, c > 0$ şi $b \geq 0.$ Demonstrați inegalitățile:

a) $\frac{a}{b+c} + \frac{b(a+3c)}{3ac} + 3\frac{c}{a+b} \geq \frac{8}{3};$

b) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{2b}{ac} + \frac{c^2}{a+b} \geq 4 - \frac{1}{a} - \frac{1}{c};$

c) $\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}{ac} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geq 4 - \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{c}};$

d) $\frac{a}{2(b+c)} + \frac{b(2a+c)}{ac} + \frac{c}{a+b} \geq 1.$

e) $\frac{a}{b+2c} + \frac{b(a+c)}{ac} + \frac{2c}{a+2b} \geq 2.$

f) $\frac{a}{b+2c} + \frac{b(a+2c)}{2ac} + \frac{2c}{a+b} \geq 2.$