GENERALIZĂRI ALE UN0R PROBLEME PROPUSE LA BACALAUREAT, 2009

de Ion Bursuc

Motto:*Eu sunt vița,voi sunteți mlădițele.Cel ce rămâne în Mine și Eu în el,acela aduce roadă multă,căci fără Mine nu puteți face nimic(IOAN,cap.15,v.5).*

La examenul de Bacalaureat din anul 2009 au fost propuse următoarele probleme:

Problema 1.Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real(varianta $I.2$).

Problema 2.Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (varianta $I.99$)

Problema 3.Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|1+x|=1-x$ (varianta $I.100$)

Problema 4.Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\sqrt[6]{x^2-2x+1}=\sqrt[3]{3-x}$ (varianta $I.100$)

În cele ce urmează vom da mai multe generalizări ale acestor probleme.

Generalizarea 1:

Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că numărul $z=(a+ib)^{2n}(b+ia)^{2n}$ este real.

Soluție:

Se observă că $z=\left(ab+i\left(a^2+b^2\right)-ab\right)^{2n}=\left(a^2+b^2\right)^{2n}\cdot(-1)^n\in\mathbb{R}$

Observația 1. Pentru $n=6$, $a=1$, $b=-1$ se obține **problema 1** .

Generalizarea 2:

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că numărul

$z=(a+ib)^{2n}(c+di)^{2n}(ad+bc+(ac-bd)i)^{2n}$ este real.

Soluție:

Se observă că

$$z=\left[(a+bi)(c+di)(ad+bc+i(ac-bd))\right]^{2n}=$$

$$\left[(ac-bd+i(ad+bc))(ad+bc+i(ac-bd))\right]^{2n}=$$

$$\left[(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\right]^{2n}(-1)^n\in\mathbb{R}$$

Observația 2. Pentru, $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=0$, $n=6$ se obține problema 1.

Generalizarea 3:

Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că numărul $z=\left(a+bi\right)^{4n}\cdot\left(\frac{a+b}{2}+i\frac{a-b}{2}\right)^{4n}$ este real.

Soluție:

Numărul z se poate scrie astfel:

$$z=\left(a^2-b^2+2abi\right)^{2n}\cdot\left(ab+\frac{a^2-b^2}{2}i\right)^{2n}=\frac{\left[\left(a^2-b^2+2abi\right)\cdot\left(2ab+\left(a^2-b^2\right)i\right)\right]^{2n}}{2^{2n}}$$

$$=\frac{\left[\left(a^2-b^2\right)^2+4a^2b^2\right]^{2n}\left(-1\right)^n}{4^n}=\frac{\left(a^2+b^2\right)^{4n}\left(-1\right)^n}{4^n}\in\mathbb{R}$$

Observația 3. Pentru $a=1$, $b=1$, $n=6$ se obține **problema 1.**

Generalizare(problema 2)

Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2-2}}$ $,n\in\mathbb{N},n\geq 2$.

Soluție:

Observăm că au loc inegalitățile:

$$n-\frac{1}{2}<\sqrt{n^2-1}<n \Leftrightarrow \left(n-\frac{1}{2}\right)^2<n^2-1<n^2 \Leftrightarrow n^2-n+\frac{1}{4}<n^2-1<n^2 \Leftrightarrow n>\frac{5}{4}$$

$$n-\frac{1}{2}<\sqrt{n^2-2}<n \Leftrightarrow \left(n-\frac{1}{2}\right)^2<n^2-2<n^2 \Leftrightarrow n^2-n+\frac{1}{4}<n^2-2<n^2 \Leftrightarrow n>\frac{9}{4}$$

Din inegalitățile de mai sus obținem:

$$2n-1<\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2}<2n,\left(\forall\right)n>3\Rightarrow\left[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2}\right]=2n-1,\left(\forall\right)n>3$$

$$\Rightarrow\left[\frac{1}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2-2}}\right]=2n-1,\left(\forall\right)n>3.$$

Pentru $n=2$ avem:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$1,7<\sqrt{3}<1,8$; $1,4<\sqrt{2}<1,5\Rightarrow$ $3,1<\sqrt{3}+\sqrt{2}<3,3\Rightarrow\left[\sqrt{3}+\sqrt{2}\right]=3$.

Generalizare(problema 3)

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\left|a+bx\right|=a-bx$,unde $a,b>0$.

Soluție:

Ecuația $|a+bx|=a-bx$ se scrie astfel: $|a+bx|^2=(a-bx)^2, x\le\frac{a}{b}\Leftrightarrow$

$a^2+2abx+b^2x^2=a^2-2abx+b^2x^2, x\le\frac{a}{b}\Leftrightarrow x=0$.

Generalizare(problema 4)

Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\sqrt[6]{x^2-2(a-b)x+(a-b)^2}=\sqrt[3]{a+b-x}$,

unde $a,b>0$.

Soluție:

Ecuația $\sqrt[6]{x^2-2(a-b)x+(a-b)^2}=\sqrt[3]{a+b-x}$ se scrie:

$\sqrt[6]{(x-a+b)^2}=\sqrt[3]{a+b-x}\Leftrightarrow\sqrt[3]{|x-a+b|}=\sqrt[3]{a+b-x}\Leftrightarrow|x-a+b|=a+b-x\Leftrightarrow$

$|x-a+b|^2=(a+b-x)^2, x\le a+b\Leftrightarrow x^2-2x(a-b)+(a-b)^2=x^2-2x(a+b)+(a+b)^2$,

$x\le a+b\Leftrightarrow 4xb=4ab, x\le a+b\Leftrightarrow x=a.$

Probleme propuse

1. Arătați că numărul $(2+3i)^{100}(3+2i)^{100}$ este real.

2. Arătați că numărul $z=(1+3i)^{50}(3+2i)^{50}(11-3i)^{50}$ este real.

3. Arătați că numărul $z=(2+5i)^{40}(7-3i)^{40}$ este real.

4. Arătați că numărul $z=(4+3i)^{50}\cdot(2+i)^{100}\cdot(2+i)^{60}\cdot(1+2i)^{60}$ este real.

5. Arătați că numărul $z=(3+i)^{99}\cdot(1+3i)^{99}\cdot(4+i)^{101}\cdot(1+4i)^{101}$ este real.

6. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$.

7. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{14}}$.

8. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{624}-\sqrt{623}}$.

9. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|3+x|=3-x$.

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|5+2x|=5-2x$.

11. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\sqrt[6]{x^2-2x+1}=\sqrt[3]{5-x}$.

12. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\sqrt[6]{x^2-4x+4}=\sqrt[3]{8-x}$.

13. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\sqrt[6]{x^2-6x+9}=\sqrt[3]{7-x}$.