ASUPRA UNOR PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICĂ

de Ion Bursuc

Motto:Ci toate câte voiți să vă facă vouă oamenii, asemenea şi voi faceți lor, că aceasta este Legea şi Proorocii(Matei,cap.7,v.12).

În Gazeta Matematică seria B,nr.5/2005,pag.216,profesorul I. Safta propune următoarea problemă:

Problema 1.

Studiați natura triunghiului ABC cu lungimile laturilor a,b,c pentru care are loc relația: $\frac{a^n-b^n}{c}+\frac{b^n-c^n}{a}+\frac{c^n-a^n}{b}=0, n\in\mathbb{N}^*, n$ fixat.

În Gazeta Matematică seria B,nr.8/2006,pag.507,profesorii Romanța Ghiță şi Ioan Ghiță propun următoarea problemă:

Problema 2. Fie $a,b,c>0$ .Demonstrați că:

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{b}}=2$,dacă şi numai dacă $a=bc$.

În cele ce urmează ne propunem să generalizăm **Problema 1**,să dăm la **Problema 2** câteva soluții diferite de cea dată înG.M.nr.2/2007,pag.81,urmate de unele generalizări,precum şi de compunerea altor probleme asemănătoare cu cea de mai sus.

Generalizare (Problema 1)

Studiați natura triunghiului ABC cu lungimile laturilor a,b,c pentru care are loc relația:

$\frac{f(a)-f(b)}{c}+\frac{f(b)-f(c)}{a}+\frac{f(c)-f(a)}{b}=0$, unde $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcție strict crescătoare şi convexă.

Soluție: Vom arăta că triunghiul ABC este isoscel sau echilateral.

Presupunem că triunghiul ABC nu este isoscel sau echilateral.Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $a>b>c$.

Relația din enunț se scrie:

$$\frac{f(a)-f(b)}{c}+\frac{f(b)-f(c)}{a}-\frac{\left(f(a)-f(b)\right)+\left(f(b)-f(c)\right)}{b}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(a)-f(b)}{c}-\frac{f(a)-f(b)}{b}\right)+\left(\frac{f(b)-f(c)}{a}-\frac{f(b)-f(c)}{b}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(f(a)-f(b)\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+\left(f(b)-f(c)\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$a\left(f(a)-f(b)\right)(b-c)+c\left(f(b)-f(c)\right)(b-a)=0 \Leftrightarrow$$

$a\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=c\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$ (1).Cum funcția f este convexă şi strict crescătoare avem $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\geq\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$ şi cum $a>c\Rightarrow$

$a\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}>c\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$ ceea ce contrazice relația (1).

Observația 1. Din demonstrația dată se observă că pentru orice funcție $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, crescătoare şi convexă avem

$$\frac{f(a)-f(b)}{c}+\frac{f(b)-f(c)}{a}+\frac{f(c)-f(a)}{b}\geq 0,(\forall)a,b,c>0.$$

Observația 2.Pentru funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$ se obține **Problema 1.**

Soluția1(Problema 2):

Egalitatea dată se scrie astfel:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{c}}-1+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{b}}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-\sqrt{bc}}{\sqrt{b}\left(1+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{bc}}{\sqrt{c}\left(1+\sqrt{b}\right)}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b}\left(1+\sqrt{c}\right)}+\frac{1}{\sqrt{c}\left(1+\sqrt{b}\right)}\right)=0$$

$\Leftrightarrow a=bc.$

Soluția 2: Dacă notăm $\dfrac{1}{\sqrt{b}\left(1+\sqrt{c}\right)}=u$ şi $\dfrac{1}{\sqrt{c}\left(1+\sqrt{b}\right)}=v$, atunci egalitatea din enunț devine:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)u+\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)v = \sqrt{b}\left(1+\sqrt{c}\right)u+\sqrt{c}\left(1+\sqrt{b}\right)v \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{a}(u+v)=\sqrt{bc}(u+v) \Leftrightarrow a=bc.$$

Soluția 3: Se observă că funcția

$$f:(0,\infty)\to(0,\infty),\quad f(x)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{c}}+$$

$+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{b}}$ este strict crescătoare. Cum $f(bc)=2$, deducem că relația din enunț fiind echivalentă cu $f(a)=f(bc)$ are loc dacă şi numai dacă $a=bc$.

În continuare ,deşi ***soluția 3*** este cea mai simplă la generalizările care urmează vom urmări să dăm unele soluții care pot fi folosite şi în gimnaziu(soluția1 şi soluția2).

Generalizarea 1(Problema 2)

Fie $a,b,c,x,y,\alpha,\beta>0$ .Demonstrați că:

$$\frac{\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y}{\beta+\sqrt{b}}=x+y$$,dacă şi numai dacă $a=bc$.

Soluția1 :

Egalitatea dată se scrie astfel: $\dfrac{\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{x}{\alpha+\sqrt{c}}-x+\dfrac{\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\dfrac{y}{\beta+\sqrt{b}}-y=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)}{\sqrt{b}\left(\alpha+\sqrt{c}\right)}+\frac{y\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)}{\sqrt{c}\left(\beta+\sqrt{b}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{b}\left(\alpha+\sqrt{c}\right)}+\frac{y}{\sqrt{c}\left(\beta+\sqrt{b}\right)}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=bc.$$

Soluția 2: Dacă notăm $\dfrac{x}{\sqrt{b}\left(\alpha+\sqrt{c}\right)}=u$ şi $\dfrac{y}{\sqrt{c}\left(\beta+\sqrt{b}\right)}=v$, atunci egalitatea din enunț devine:

$$\left(\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}\right)u+\left(\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}\right)v=\sqrt{b}\left(\alpha+\sqrt{c}\right)u+\sqrt{c}\left(\beta+\sqrt{b}\right)v \quad\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{a}\,(u+v)=\sqrt{bc}\,(u+v)\ \Leftrightarrow\ a=bc.$$

Observația 3. Pentru $\alpha=\beta=x=y=1$,obținem problema din G.M.nr.8/2006.

Generalizarea 2

Fie $a,b,c,x,y,\alpha,\beta,\alpha_1,\beta_1>0$, astfel încât : $(\alpha-\alpha_1)(\beta-\beta_1)>0$. Demonstrați că:

$$\frac{\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y}{\beta+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\alpha_1\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha_1+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\beta_1\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y}{\beta_1+\sqrt{b}}$$ dacă şi numai dacă $a=bc$.

Soluție:

Egalitatea dată se scrie astfel: $\frac{\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha+\sqrt{c}}-x+\frac{\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y}{\beta+\sqrt{b}}-y=$

$$=\frac{\sqrt{a}+\alpha_1\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha_1+\sqrt{c}}-x+\frac{\sqrt{a}+\beta_1\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y}{\beta_1+\sqrt{b}}-y \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)}{\sqrt{b}\left(\alpha+\sqrt{c}\right)}+\frac{y\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)}{\sqrt{c}\left(\beta+\sqrt{b}\right)}=\frac{x\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)}{\sqrt{b}\left(\alpha_1+\sqrt{c}\right)}+\frac{y\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)}{\sqrt{c}\left(\beta_1+\sqrt{b}\right)}\ \Leftrightarrow\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{b}\left(\alpha+\sqrt{c}\right)}+\frac{y}{\sqrt{c}\left(\beta+\sqrt{b}\right)}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{b}\left(\alpha_1+\sqrt{c}\right)}+\frac{y}{\sqrt{c}\left(\beta_1+\sqrt{b}\right)}\right)$$

$\Leftrightarrow\ a=bc.$

Asemănător ca în demonstrația dată la ***Generalizarea 1*** obținem:

Propoziția 1 Fie $a,b,c,x,y,\alpha,\beta>0$ .Atunci au loc echivalențele:

a) $\frac{\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y}{\beta+\sqrt{b}}>x+y$, dacă şi numai dacă $a>bc$.

b) $\frac{\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y}{\beta+\sqrt{b}}<x+y$, dacă şi numai dacă $a<bc$.

Propoziția 2 Fie $a,b,c,x,y,\alpha,\beta,\alpha_1,\beta_1>0$, astfel încât : $\alpha<\alpha_1,\beta<\beta_1$.
Atunci au loc echivalențele:

a) $\frac{\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y}{\beta+\sqrt{b}}>\frac{\sqrt{a}+\alpha_1\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha_1+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\beta_1\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot$

$\cdot\frac{y}{\beta_1+\sqrt{b}}$ dacă şi numai dacă $a>bc$.

b) $\frac{\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y}{\beta+\sqrt{b}}<\frac{\sqrt{a}+\alpha_1\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{x}{\alpha_1+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\beta_1\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot$

$\cdot\frac{y}{\beta_1+\sqrt{b}}$ dacă şi numai dacă $a<bc$.

Generalizarea 3

Fie $n\in\mathbb{N}^*,n\geq 2$ şi funcțiile $f_1,f_2,....,f_n,g_1,g_2,...,g_n:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu $f_1,f_2,....,f_n$ strict crescătoare.Dacă există $x_1,x_2,...,x_n,a,a_1,a_2,....,a_n>0$, $y_1,y_2,...,y_n\geq 0$ (nu toate nule),atunci avem:

$$\frac{f_1(a)+x_1g_1(a_1)}{g_1(a_1)}\cdot\frac{y_1}{x_1+\frac{f_1(a_1a_2...a_n)}{g_1(a_1)}}+\frac{f_2(a)+x_2g_2(a_2)}{g_2(a_2)}\cdot\frac{y_2}{x_2+\frac{f_2(a_1a_2...a_n)}{g_2(a_2)}}+\cdots+$$

$$+\frac{f_n(a)+x_ng_n(a_n)}{g_n(a_n)}\cdot\frac{y_n}{x_n+\frac{f_n(a_1a_2...a_n)}{g_n(a_n)}} = y_1+y_2+\cdots+y_n \quad\Leftrightarrow\quad a=a_1a_2...a_n \ .$$

Soluție: Fie $P=a_1a_2...a_n$ .Egalitatea din enunț se scrie astfel:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f_k(a)+x_kg_k(a_k)}{g_k(a_k)}\cdot\frac{y_k}{x_k+\frac{f_k(P)}{g_k(a_k)}}-y_k\right)=0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\left(f_k(a)-f_k(P)\right)}{x_kg_k(a_k)+f_k(P)}=0 \qquad (1)$$

Dacă $a>P$ atunci cum $f_1, f_2,...., f_n$ sunt strict crescătoare , rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\left(f_k(a)-f_k(P)\right)}{x_kg_k(a_k)+f_k(P)}>0 \ .$$

Dacă $a<P$ atunci cum $f_1, f_2,...., f_n$ sunt strict crescătoare , rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\left(f_k(a)-f_k(P)\right)}{x_kg_k(a_k)+f_k(P)}<0 \ .$$

Prin urmare,egalitatea (1) are loc dacă şi numai dacă $a=P$.

Propoziția 3

Fie $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ şi funcțiile $f_1, f_2,...., f_n, g_1, g_2,..., g_n:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu $f_1, f_2,...., f_n$ strict crescătoare. Dacă există $x_1, x_2,..., x_n, a, a_1, a_2,...., a_n > 0$, $y_1, y_2,..., y_n\geq 0$ (nu toate nule),atunci avem:

a) $$\frac{f_1(a)+x_1g_1(a_1)}{g_1(a_1)}\cdot\frac{y_1}{x_1+\frac{f_1(a_1a_2...a_n)}{g_1(a_1)}}+\frac{f_2(a)+x_2g_2(a_2)}{g_2(a_2)}\cdot\frac{y_2}{x_2+\frac{f_2(a_1a_2...a_n)}{g_2(a_2)}}+\cdots+$$

$$+\frac{f_n(a)+x_ng_n(a_n)}{g_n(a_n)}\cdot\frac{y_n}{x_n+\frac{f_n(a_1a_2...a_n)}{g_n(a_n)}} \geq y_1+y_2+\cdots+y_n \quad\Leftrightarrow\quad a\geq a_1a_2...a_n \ .$$

b) $$\frac{f_1(a)+x_1g_1(a_1)}{g_1(a_1)}\cdot\frac{y_1}{x_1+\frac{f_1(a_1a_2...a_n)}{g_1(a_1)}}+\frac{f_2(a)+x_2g_2(a_2)}{g_2(a_2)}\cdot\frac{y_2}{x_2+\frac{f_2(a_1a_2...a_n)}{g_2(a_2)}}+\cdots+$$

$$+\frac{f_n(a)+x_ng_n(a_n)}{g_n(a_n)}\cdot\frac{y_n}{x_n+\frac{f_n(a_1a_2...a_n)}{g_n(a_n)}} \leq y_1+y_2+\cdots+y_n \quad\Leftrightarrow\quad a\leq a_1a_2...a_n \ .$$

Propoziția 4

Fie $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ şi funcțiile $f_1, f_2,...., f_n, g_1, g_2,..., g_n:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu $f_1, f_2,...., f_n$ strict crescătoare.Dacă există $x_1, x_2,..., x_n, z_1, z_2,..., z_n, a, a_1, a_2,...., a_n>0$, $y_1, y_2,..., y_n \geq 0$ (nu toate nule) cu $x_k < z_k$, $(\forall)\, k\in\{1,2,...,n\}$, atunci avem:

$$\frac{f_1(a)+x_1g_1(a_1)}{g_1(a_1)}\cdot\frac{y_1}{x_1+\frac{f_1(a_1a_2...a_n)}{g_1(a_1)}}+\frac{f_2(a)+x_2g_2(a_2)}{g_2(a_2)}\cdot\frac{y_2}{x_2+\frac{f_2(a_1a_2...a_n)}{g_2(a_2)}}+\cdots+$$

$$+\frac{f_n(a)+x_ng_n(a_n)}{g_n(a_n)}\cdot\frac{y_n}{x_n+\frac{f_n(a_1a_2...a_n)}{g_n(a_n)}}=\frac{f_1(a)+z_1g_1(a_1)}{g_1(a_1)}\cdot\frac{y_1}{z_1+\frac{f_1(a_1a_2...a_n)}{g_1(a_1)}}+$$

$$+\frac{f_2(a)+z_2g_2(a_2)}{g_2(a_2)}\cdot\frac{y_2}{z_2+\frac{f_2(a_1a_2...a_n)}{g_2(a_2)}}+\cdots+\frac{f_n(a)+z_ng_n(a_n)}{g_n(a_n)}\cdot\frac{y_n}{z_n+\frac{f_n(a_1a_2...a_n)}{g_n(a_n)}}$$

$$\Leftrightarrow\quad a=a_1a_2...a_n\ .$$

Soluție: Fie $P=a_1a_2...a_n$ .Egalitatea din enunț se scrie astfel:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f_k(a)+x_kg_k(a_k)}{g_k(a_k)}\cdot\frac{y_k}{x_k+\frac{f_k(P)}{g_k(a_k)}}-y_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f_k(a)+z_kg_k(a_k)}{g_k(a_k)}\cdot\frac{y_k}{z_k+\frac{f_k(P)}{g_k(a_k)}}-y_k\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\left(f_k(a)-f_k(P)\right)}{x_kg_k(a_k)+f_k(P)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\left(f_k(a)-f_k(P)\right)}{z_kg_k(a_k)+f_k(P)}\quad\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}y_k\left(f_k(a)-f_k(P)\right)E_k=0,$$

unde $E_k=\frac{1}{x_kg_k(a_k)+f_k(P)}-\frac{1}{z_kg_k(a_k)+f_k(P)}>0,(\forall)\,k\in\{1,2,...,n\}$

Dacă $a>P$ atunci cum $f_1, f_2,...., f_n$ sunt strict crescătoare , rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n}y_k\left(f_k(a)-f_k(P)\right)E_k>0\ .$$

Dacă $a<P$ atunci cum $f_1, f_2,...., f_n$ sunt strict crescătoare , rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n}y_k\left(f_k(a)-f_k(P)\right)E_k<0\,.$$

Prin urmare,egalitatea din enunț are loc dacă şi numai dacă $a=P$.

Propoziția 5
Fie numerele strict pozitive a,b,c,x,y. Arătați că au loc echivalențele:

a) $$x\frac{\left(a+\sqrt{b}\right)\sqrt{c}}{a\left(1+\sqrt{c}\right)}+y\frac{\left(a+\sqrt{c}\right)\sqrt{b}}{a\left(1+\sqrt{b}\right)}=x+y \quad\Leftrightarrow\quad a=\sqrt{bc}\,.$$

b) $$x\frac{\left(a+\sqrt{b}\right)\sqrt{c}}{a\left(1+\sqrt{c}\right)}+y\frac{\left(a+\sqrt{c}\right)\sqrt{b}}{a\left(1+\sqrt{b}\right)}\geq x+y \quad\Leftrightarrow\quad a\leq\sqrt{bc}\,.$$

c) $$x\frac{\left(a+\sqrt{b}\right)\sqrt{c}}{a\left(1+\sqrt{c}\right)}+y\frac{\left(a+\sqrt{c}\right)\sqrt{b}}{a\left(1+\sqrt{b}\right)}\leq x+y \quad\Leftrightarrow\quad a\geq\sqrt{bc}\,.$$

Soluție:

Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(t)=x\frac{\left(1+\frac{\sqrt{b}}{t}\right)\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}+y\frac{\left(1+\frac{\sqrt{c}}{t}\right)\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}$.

Observăm că funcția f este strict descrescătoare şi că

$$f\left(\sqrt{bc}\right)=x+y.$$

a) Relația dată se scrie: $f\left(\sqrt{bc}\right)=f(a)$, ceea ce este echivalent cu $a=\sqrt{bc}$.

Analog se demonstrează şi celelalte puncte.

Propoziția 6 Fie $\lambda,a,b,c>0$ şi funcțiile $f,g,f_1,f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f_1(x)=xf(x)$, $f_2(x)=xg(x)$ .Arătați că:

a) Dacă funcțiile f_1 şi f_2 sunt simultan strict crescătoare sau simultan strict descrescătoare atunci are loc echivalența :

$$\frac{\lambda ab\cdot f(a)}{a\cdot f(a)+\lambda b\cdot f\left(\sqrt{bc}\right)}+\frac{ac\cdot g(a)}{c\cdot g\left(\sqrt{bc}\right)+\lambda a\cdot g(a)}=\sqrt{bc} \quad\Leftrightarrow\quad a=\sqrt{bc}\,.$$

b) Dacă funcțiile f_1 şi f_2 sunt simultan crescătoare atunci are loc echivalența :

$$\frac{\lambda ab\cdot f(a)}{a\cdot f(a)+\lambda b\cdot f\left(\sqrt{bc}\right)}+\frac{ac\cdot g(a)}{c\cdot g\left(\sqrt{bc}\right)+\lambda a\cdot g(a)}\geq\sqrt{bc} \quad\Leftrightarrow\quad a\geq\sqrt{bc}\,.$$

c)Dacă funcțiile f_1 şi f_2 sunt simultan descrescătoare atunci are loc echivalența :

$$\frac{\lambda ab\cdot f(a)}{a\cdot f(a)+\lambda b\cdot f\left(\sqrt{bc}\right)}+\frac{ac\cdot g(a)}{c\cdot g\left(\sqrt{bc}\right)+\lambda a\cdot g(a)}\geq\sqrt{bc} \quad\Leftrightarrow\quad a\leq\sqrt{bc}\,.$$

Soluție:
a)Dacă considerăm funcția $h:(0,\infty)\to(0,\infty)$,

$$h(x)=\frac{\lambda b}{1+\frac{\lambda bf(\sqrt{bc})}{xf(x)}}+\frac{c}{\lambda+\frac{cg(\sqrt{bc})}{xg(x)}}$$,atunci observăm că $h(\sqrt{bc})=\sqrt{bc}$ şi prin urmare, relația din enunț se scrie: $h(a)=h(\sqrt{bc})$.Cum funcția h este strict monotonă deducem că relația din enunț are loc dacă şi numai dacă $a=\sqrt{bc}$

Analog se demonstrează şi celelalte puncte.

Propoziția 7 Fie $\lambda_1,\lambda_2,a,b,c>0$, $b\lambda_1\lambda_2=c$ şi funcțiile $f,g:(0,\infty)\to(0,\infty)$.Atunci avem:

a) Dacă funcția f este strict crescătoare , iar funcția g este strict descrescătoare
şi $\lambda_1>\lambda_2$,atunci are loc relația

$$\frac{\lambda_1 ab\cdot f(a)}{a\cdot f(a)+\lambda_1 b\cdot f(\sqrt{bc})}+\frac{ac\cdot g(a)}{c\cdot g(\sqrt{bc})+\lambda_1 a\cdot g(a)}=\frac{\lambda_2 ab\cdot f(a)}{a\cdot f(a)+\lambda_2 b\cdot f(\sqrt{bc})}+$$
$$+\frac{ac\cdot g(a)}{c\cdot g(\sqrt{bc})+\lambda_2 a\cdot g(a)}$$ dacă şi numai dacă $a=\sqrt{bc}$.

b) Demonstrați aceeaşi echivalență de mai sus în cazul în care funcția f este strict descrescătoare ,iar funcția g este strict crescătoare.

c) Dacă funcția f este crescătoare ,iar funcția g este descrescătoare şi $\lambda_1\geq\lambda_2$,$b\lambda_1\lambda_2=c$, $a,b,c>0, a\geq\sqrt{bc}$ atunci are loc inegalitatatea:

$$\frac{\lambda_1 ab\cdot f(a)}{a\cdot f(a)+\lambda_1 b\cdot f(\sqrt{bc})}+\frac{ac\cdot g(a)}{c\cdot g(\sqrt{bc})+\lambda_1 a\cdot g(a)}\geq\frac{\lambda_2 ab\cdot f(a)}{a\cdot f(a)+\lambda_2 b\cdot f(\sqrt{bc})}+$$
$$+\frac{ac\cdot g(a)}{c\cdot g(\sqrt{bc})+\lambda_2 a\cdot g(a)}\quad .$$

Soluție:
Relația dată se scrie astfel:

$$\lambda_1 b\left(\frac{1}{1+\frac{\lambda_1 bf(\sqrt{bc})}{af(a)}}-\frac{1}{1+\frac{\lambda_1 b}{a}}\right)+c\left(\frac{1}{\lambda_1+\frac{cg(\sqrt{bc})}{ag(a)}}-\frac{1}{\lambda_1+\frac{c}{a}}\right)=$$

$$=\lambda_2 b\left(\frac{1}{1+\frac{\lambda_2 bf\left(\sqrt{bc}\right)}{af\left(a\right)}}-\frac{1}{1+\frac{\lambda_2 b}{a}}\right)+c\left(\frac{1}{\lambda_2+\frac{cg\left(\sqrt{bc}\right)}{ag\left(a\right)}}-\frac{1}{\lambda_2+\frac{c}{a}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda_1^2 b^2\left(f\left(a\right)-f\left(\sqrt{bc}\right)\right)}{\left(af\left(a\right)+\lambda_1 bf\left(\sqrt{bc}\right)\right)\left(1+\lambda_1\frac{b}{a}\right)}+\frac{c^2\left(g\left(a\right)-g\left(\sqrt{bc}\right)\right)}{\left(\lambda_1 ag\left(a\right)+cg\left(\sqrt{bc}\right)\right)\left(\lambda_1+\frac{c}{a}\right)}=$$

$$=\frac{\lambda_2^2 b^2\left(f\left(a\right)-f\left(\sqrt{bc}\right)\right)}{\left(af\left(a\right)+\lambda_2 bf\left(\sqrt{bc}\right)\right)\left(1+\lambda_2\frac{b}{a}\right)}+\frac{c^2\left(g\left(a\right)-g\left(\sqrt{bc}\right)\right)}{\left(\lambda_2 ag\left(a\right)+cg\left(\sqrt{bc}\right)\right)\left(\lambda_2+\frac{c}{a}\right)} \qquad (2)$$

Dacă are loc relația (2) şi $a>\sqrt{bc}$, atunci $f\left(a\right)>f\left(\sqrt{bc}\right)$,

$$F\left(\lambda_1\right)=\frac{\lambda_1^2 b^2}{\left(af\left(a\right)+\lambda_1 bf\left(\sqrt{bc}\right)\right)\left(1+\lambda_1\frac{b}{a}\right)}=\frac{b^2}{\left(\frac{af\left(a\right)}{\lambda_1}+bf\left(\sqrt{bc}\right)\right)\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{b}{a}\right)}>F\left(\lambda_2\right),$$

$$g\left(a\right)<g\left(\sqrt{bc}\right),G\left(\lambda_1\right)=\frac{c^2}{\left(cg\left(\sqrt{bc}\right)+\lambda_1 ag\left(a\right)\right)\left(\lambda_1+\frac{c}{a}\right)}<G\left(\lambda_2\right).$$

Din aceste relații deducem că primul membru al relației (2) este strict mai mare decât celălalt membru , deci se ajunge la contradicție.Analog se ajunge la contra -dicție şi în cazul în care $a<\sqrt{bc}$. Prin urmare ,ținând cont de relația (2) deducem că are loc echivalența din enunț.
Cerințele de la punctele b) şi c) se demonstrează asemănător.

Cazuri particulare:

1.Pentru $x=\sqrt{b}$, $y=\sqrt{c}$,din ***Generalizarea 1*** obținem:

Dacă $\alpha,\beta>0$, atunci $\frac{\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}}{\alpha+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}}{\beta+\sqrt{b}}=\sqrt{b}+\sqrt{c}\Leftrightarrow a=bc$.

2.Pentru $x=\frac{\sqrt{b}}{\alpha+\sqrt{c}}$, $y=\frac{\sqrt{c}}{\beta+\sqrt{b}}$, din ***Generalizarea 1*** obținem:

Dacă $\alpha,\beta>0$,atunci $\frac{\sqrt{a}+\alpha\sqrt{b}}{\left(\alpha+\sqrt{c}\right)^2}+\frac{\sqrt{a}+\beta\sqrt{c}}{\left(\beta+\sqrt{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{b}}{\alpha+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{c}}{\beta+\sqrt{b}} \Leftrightarrow a=bc$.

3.Pentru $\alpha=\beta=\sqrt{bc}$,$\alpha_1=\sqrt{c}$,$\beta_1=\sqrt{b}$ şi $(b-1)(c-1)>0$,din ***Generalizarea 2***

obținem: $\frac{x\left(\sqrt{a}+b\sqrt{c}\right)}{1+\sqrt{b}}+\frac{y\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)}{1+\sqrt{c}}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{bc}\right)\frac{x+y}{2} \Leftrightarrow a=bc$.

4.Din ***Propoziția 5*** obținem că numerele $a,b,c>0$ sunt în progresie geometrică dacă şi numai dacă are loc

relația: $x\frac{\left(b+\sqrt{a}\right)\sqrt{c}}{b\left(1+\sqrt{c}\right)}+y\frac{\left(b+\sqrt{c}\right)\sqrt{a}}{b\left(1+\sqrt{a}\right)}=x+y,$cu $x,y>0$.

5. Din ***Propoziția 6*** obținem că numerele $a,b,c>0$ sunt în progresie geometrică dacă şi numai dacă are loc relația :

$\frac{\lambda ab}{b+\lambda a}+\frac{bc}{c+\lambda b}=\sqrt{ac}$,cu $\lambda>0$.

<u>Probleme propuse</u>:

1.Demonstrați cazurile particulare 1,2,3 de mai sus folosind metoda dată la soluția 2 problemei din Gazeta Matematică.

2.Demonsrați folosind aceeaşi metoda din soluția 2 că dacă

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{b}}\geq 2$ şi $a,b,c>0$,atunci $a\geq bc$.

3.Dacă $a,b,c,d>0$,atunci $\frac{a+b}{b}\cdot\frac{1}{1+cd}+\frac{a+c}{c}\cdot\frac{1}{1+bd}+\frac{a+d}{d}\cdot\frac{1}{1+cb}=3$

$\Leftrightarrow a=bcd$

4.Demonstrați că dacă $\lambda_1,\lambda_2,a,b,c>0$, $b\lambda_1\lambda_2=c$,atunci are loc egalitatea:

$$\frac{\lambda_1 ab}{a+\lambda_1 b}+\frac{ac}{a\lambda_1+c}=\frac{\lambda_2 ab}{a+\lambda_2 b}+\frac{ac}{a\lambda_2+c} .$$

<u>Bibliografie</u>:

[1] Gazeta Matematică seria B,nr.8/2006.

[2] Gazeta Matematică seria B, nr.2/2007.

Profesor,

Colegiul Național de Informatică “Spiru Haret”,

Str.Zorilor,nr. 17 ,Suceava