Generalizări ale unei probleme dată la Olimpiada de Matematică din Argentina,2007

de Bursuc Ion

Motto: Iar vouă celor ce ascultați vă spun: Iubiți pe vrăjmașii voștri, faceți bine celor ce vă urăsc pe voi;Binecuvântați pe cei ce vă blestemă, rugați-vă pentru cei ce vă fac necazuri.

(Luca,cap.6,v.27-28)

La Olimpiada de Matematică din Argentina , în anul 2007 a fost dată următoarea problemă:

Determinați numerele reale $x>1$ ce satisfac relația:

$$\frac{x^2}{x-1}+\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \qquad \textbf{(1)}$$

În cele ce urmează voi da câteva generalizări a acestei frumoase probleme,urmate de unele cazuri particulare semnificative

Generalizarea 1

Determinați numerele reale $x>1$ce satisfac relația:

$$u\frac{x^n}{x-1}+\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{ux^n}=\frac{x-1}{ux^n}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{ux^n}{\sqrt{x-1}},\ \text{unde } n\in\mathbb{N},\ n,u\geq 1. \qquad \textbf{(2)}$$

Soluție:

Dacă privim cu atenție ambii membri ai ecuației observăm următoarele:

În primul membru apare expresia $\frac{ux^n}{x-1}$, iar în al doilea membru apare inversa ei $\frac{x-1}{ux^n}$.

În primul membru apare expresia$\sqrt{x-1}$, iar în al doilea membru apare inversa ei$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

În primul membru apare expresia$\frac{\sqrt{x-1}}{ux^n}$, iar în al doilea membru apare inversa ei$\frac{ux^n}{\sqrt{x-1}}$.

Notăm $\frac{ux^n}{x-1}=a$ și $\sqrt{x-1}=b$ .Se observă că $ab=\frac{ux^n}{\sqrt{x-1}}$.Ecuația (2) devine:

$$a+b+\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab \qquad \textbf{(3)}$$

$$\Leftrightarrow\left(a+b-\frac{a+b}{ab}\right)-\left(ab-\frac{1}{ab}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a+b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)-\frac{(ab)^2-1}{ab}=0\Leftrightarrow(a+b)\frac{ab-1}{ab}-\frac{(ab-1)(ab+1)}{ab}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab-1}{ab}(a+b-ab-1)=0\Leftrightarrow-\frac{ab-1}{ab}(a-1)(b-1)=0 \qquad \textbf{(4)}$$

$\Leftrightarrow a=1$ sau $b=1$ sau $ab=1\Leftrightarrow ux^n=x-1$ sau $\sqrt{x-1}=1$ sau $ux^n=\sqrt{x-1}$.

Ecuația $ux^n-x+1=0$ nu are soluții reale deoarece $ux^n-x+1\geq x-x+1>0$

Ecuația $\sqrt{x-1}=1$ are soluția $x=2$.

Ecuația $ux^n=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow u^2x^{2n}=x-1$ nu are soluții $x>1$ deoarece $u^2x^{2n}>x>x-1\Rightarrow$ că singura soluție a ecuației din enunț este $x=2$.

Generalizarea 2

Fie $k>0, n\in\mathbb{N}, n\geq 2, u\geq 1$.Determinați numerele reale $x>\max\left\{k,1-\frac{k}{2n-1}\right\}$ ce satisfac relația:

$$u\frac{x^n}{x-k}+\sqrt{x-k}+\frac{\sqrt{x-k}}{ux^n}=\frac{x-k}{ux^n}+\frac{1}{\sqrt{x-k}}+\frac{ux^n}{\sqrt{x-k}}\ . \qquad \textbf{(5)}$$

Soluție:

Se procedează asemănător.Ecuația se reduce la rezolvarea ecuațiilor

$$\frac{ux^n}{x-k}=1\quad(\mathbf{6})\quad,\quad\sqrt{x-k}=1\quad(\mathbf{7})\quad,ux^n=\sqrt{x-k}\quad(\mathbf{8}).$$

Vom arăta că ecuația $(6), ux^n=x-k$ nu are soluție.Vom folosi inegalitatea lui Bernoulli:

Dacă $x>-1$ **şi** $n\in\mathbb{N}^*$, **atunci** $(1+x)^n\geq 1+nx$**.**

Într-adevăr:

$ux^n\geq x^n=(1+x-1)^n\geq 1+n(x-1)=x+(1-x)+n(x-1)=x+(n-1)(x-1)>x+(n-1)\left(-\frac{k}{2n-1}\right)>$
$x-k\Rightarrow ux^n>x-k\Rightarrow$ecuația (6) nu are soluție.

Ecuația (7) are soluția $x=k+1>\max\left\{k,1-\frac{k}{2n+1}\right\}$.

Vom arăta că ecuația (8) nu are soluție.

Într-adevăr, aceasta, este echivalentă cu ecuația $u^2x^{2n}=x-k$. Din inegalitatea lui Bernoulli obținem: $u^2x^{2n}\geq x^{2n}=(1+x-1)^{2n}\geq 1+2n(x-1)=x+(1-x)+2n(x-1)=$

$=x+(2n-1)(x-1)>x-k\Rightarrow u^2x^{2n}>x-k\Rightarrow$ că ecuația (8) nu are soluție.

Prin urmare, singura soluție a ecuației din enunț este $x=k+1$.

Generalizarea 3

Fie funcțiile $f,g,h:A\subset\mathbb{R}\to(0,\infty)$ şi $u\geq 1$.Rezolvați pe mulțimea A ecuația

$$u\frac{f(x)}{g^2(x)}+g(x)+\frac{g(x)}{uf(x)}=\frac{g^2(x)}{uf(x)}+\frac{1}{g(x)}+\frac{uf(x)}{g(x)}$$

(9)

ştiind că $f(x)>\max\{g(x),g^2(x)\},\forall x\in A$ şi ecuația $g(x)=1$ are ca mulțime de soluții pe $S\subset A$.

Soluție:

Ecuația se reduce la ecuația : $\left(\frac{uf(x)}{g^2(x)}-1\right)(g(x)-1)\left(\frac{uf(x)}{g(x)}-1\right)=0,$ adică la ecuațiile

$uf(x)=g^2(x),g(x)=1,uf(x)=g(x)$.Din condițiile date în ipoteză $\Rightarrow$ că mulțimea de soluții ale ecuației (9) este S.

Cazuri particulare:

1.Rezolvați pe mulțimea $(1,\infty)$ ecuația $\frac{x^3}{x-1}+\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{x^3}=\frac{x-1}{x^3}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}$.

2.Rezolvați pe mulțimea $(1,\infty)$ ecuația $\frac{x^4}{x-1}+\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{x^4}=\frac{x-1}{x^4}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{x^4}{\sqrt{x-1}}$.

3.Rezolvați pe mulțimea $(2,\infty)$ ecuația $\frac{x^2}{x-2}+\sqrt{x-2}+\frac{\sqrt{x-2}}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}+\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}$.