Generalizări ale două probleme date la Olimpiadă de Matematică

de Ion Bursuc şi Daniela Macovei

Motto: Omul bun, din vistieria cea bună a inimii sale, scoate cele bune, pe când omul rău, din vistieria cea rea a inimii lui, scoate cele rele. Căci din prisosul inimii grăieşte gura lui.

(Luca, cap.6,v.45)

La Olimpiada de Matematică a județului Suceava ,în anul 2011 au fost date urmmătoarele probleme:

Problema 1

Dacă numărul complex z satisface relația :

$(n+1)iz^n = nz^{n-1} + nz + (n+1)i$, unde $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$,să se arate că $|z| = 1$.

Anca Andrei, Suceava

Problema 2

Fie numerele $x, y, z \in [a, \infty)$ unde $a \geq 1$ .Arătați că are loc inegalitatea:

$$\log_{x+y}\left(yza^{-1} + a\right) + \log_{y+z}\left(zxa^{-1} + a\right) + \log_{z+x}\left(xya^{-1} + a\right) \geq 3 .$$

Ion Bursuc şi Daniela Macovei, Suceava

În cele ce urmează vom generaliza aceste probleme .Vom da şi câteva cazuri particulare semnificative.

Generalizarea problemei 1

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $|a| > |b|$ şi $k \in \mathbb{N}^*$.Dacă numărul complex z satisface relația :

$aiz^{n+k-1} = bz^{n-1} + bz^k + ai$, unde $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$,să se arate că $|z| = 1$.

Soluție

Împărțim ecuația prin i şi prelucrând relația obținem că $z^{n-1} = \dfrac{a - biz^k}{az^k + bi}$.

Înlocuind pe $z^k = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, rezultă că $z^{n-1} = \dfrac{a - bi(x+iy)}{a(x+iy) + bi} \Rightarrow$

$$z^{n-1} = \frac{a + by - bxi}{ax + (ay+b)i} .$$

Prin trecere la modul obținem : $|z|^{n-1} = \sqrt{\dfrac{(a+by)^2 + b^2x^2}{a^2x^2 + (ay+b)^2}}$.

Deoarece

$$|z|^{2(n-1)} - 1 = \frac{(a+by)^2 + b^2x^2}{a^2x^2 + (ay+b)^2} - 1 = \frac{a^2 - b^2 - (a^2 - b^2)(x^2 + y^2)}{a^2x^2 + (ay+b)^2} = \frac{(a^2 - b^2)(1 - x^2 - y^2)}{a^2x^2 + (ay+b)^2} =$$

$\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(1-|z|^{2k}\right)}{a^2x^2+(ay+b)^2} \Rightarrow |z|=1$ deoarece în caz contrar ar rezulta că $\frac{a^2-b^2}{a^2x^2+(ay+b)^2}<0$ ceea ce este fals.În concluzie, $|z|=1$.

Generalizarea problemei 2

Fie numerele $x, y, z \in [a,\infty), \alpha, \beta, \gamma > 0, \alpha\beta\gamma = 1$, unde $a \geq 1$.Arătați că are loc inegalitatea:

$$\alpha\left(\log_{x+y}\left(yza^{-1}+a\right)\right)^n+\beta\left(\log_{y+z}\left(zxa^{-1}+a\right)\right)^n+\gamma\left(\log_{z+x}\left(xya^{-1}+a\right)\right)^n \geq 3, (\forall) n>0 .$$

Soluție

Din ipoteză se observă că $xya^{-1}+a\ , x+y>1 \Rightarrow \log_{x+y}\left(yza^{-1}+a\right)>0$ .Analog avem $\log_{y+z}\left(zxa^{-1}+a\right), \log_{z+x}\left(xya^{-1}+a\right)>0$ .Tot din ipoteză deducem că:

$$(x-a)(y-a) \geq 0 \Rightarrow xy-a(x+y)+a^2 \geq 0 \Rightarrow xya^{-1}+a \geq x+y$$

şi analoagele de unde, aplicând inegalitatea mediilor vom obține:

$$\alpha\left(\log_{x+y}\left(yza^{-1}+a\right)\right)^n+\beta\left(\log_{y+z}\left(zxa^{-1}+a\right)\right)^n+\gamma\left(\log_{z+x}\left(xya^{-1}+a\right)\right)^n \geq$$

$$\alpha\left(\log_{x+y}(y+z)\right)^n+\beta\left(\log_{y+z}(z+x)\right)^n+\gamma\left(\log_{z+x}(x+y)\right)^n \geq$$

$$3\sqrt[3]{\alpha\left(\log_{x+y}(y+z)\right)^n \cdot \beta\left(\log_{y+z}(z+x)\right)^n \cdot \gamma\left(\log_{z+x}(x+y)\right)^n}=$$

$$3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma\left(\left(\log_{x+y}(y+z)\right)\cdot\left(\log_{y+z}(z+x)\right)\cdot\left(\log_{z+x}(x+y)\right)\right)^n}=3.$$

Cazuri particulare

1. Dacă numărul complex z satisface relația :
$(n+1)iz^{n+1}=nz^{n-1}+nz^2+(n+1)i$, unde $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$,să se arate că $|z|=1$.

2. Dacă numărul complex z satisface relația :
$2iz^{n+1}=z^{n-1}+z^2+2i$, unde $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$,să se arate că $|z|=1$.

3. Dacă numărul complex z satisface relația :
$3iz^n=z^{n-1}+z+3i$, unde $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$,să se arate că $|z|=1$.

4. Dacă numărul complex z satisface relația :
$niz^{n+2}=z^{n-1}+z^3+ni$, unde $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$,să se arate că $|z|=1$.

5. Fie numerele $x, y, z \in [a,\infty)$, unde $a \geq 1$.Arătați că are loc inegalitatea:

$$\log_{x+y}(y+z)\cdot\log_{x+y}\left(yza^{-1}+a\right)+\log_{y+z}(z+x)\cdot\log_{y+z}\left(zxa^{-1}+a\right)+$$
$$\log_{z+x}(x+y)\cdot\log_{z+x}\left(xya^{-1}+a\right) \geq 3.$$

6. Fie numerele $x, y, z \in [a,\infty)$, unde $a \geq 1$.Arătați că are loc inegalitatea:

$$\log_x y\cdot\log_{x+y}\left(yza^{-1}+a\right)+\log_y z\cdot\log_{y+z}\left(zxa^{-1}+a\right)+\log_z x\cdot\log_{z+x}\left(xya^{-1}+a\right)\geq 3.$$

7. Fie numerele $x, y, z\in\left[a,\infty\right)$, unde $a\geq 1$.Arătați că are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\log_{x+y}\left(yza^{-1}+a\right)}+\sqrt{\log_{y+z}\left(zxa^{-1}+a\right)}+\sqrt{\log_{z+x}\left(xya^{-1}+a\right)}\geq 3.$$