Generalizări ale două probleme date la Olimpiada de Matematică din Rusia, 2008

Ion Bursuc

Motto: Cel ce vă ascultă pe voi pe Mine Mă ascultă, şi cel ce se leapădă de voi se leapădă de Mine; iar cine se leapădă de Mine se leapădă de Cel ce M-a trimis pe Mine.

(Luca ,cap.10,v.16)

La Olimpiada de Matematică din Rusia, clasa a X-a, 2008 a fost propusă următoarea problemă:

Problema 1

Determinați tripletele de numere reale $(x, y, z)\in \mathbb{R}^3$, ce satisfac relațiile

$1+x^4 \le 2(y-z)^2, 1+y^4 \le 2(x-z)^2, 1+z^4 \le 2(x-y)^2$.

În cele ce urmează, voi generaliza această problemă şi voi da unele cazuri particulare.

Generalizare

Fie $a\in(0,\infty)$ şi $k\in[0,\infty)$.

Determinați tripletele de numere reale $(x, y, z)\in \mathbb{R}^3$, ce satisfac relațiile:

$a^2+(|x|+k)^4 \le 2a(y-z)^2, a^2+(|y|+k)^4 \le 2a(x-z)^2, a^2+(|z|+k)^4 \le 2a(x-y)^2$.

Soluție

Deoarece $2a(y-z)^2 \ge a^2+(|x|+k)^4 \ge 2a(|x|+k)^2 \Rightarrow |y-z| \ge ||x|+k|$.

Analog obținem $|x-z| \ge ||y|+k|$ şi $|x-y| \ge ||z|+k|$ **(1)**

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că: $x \ge y \ge z$. Din inegalitățile **(1)** deducem că:

$x-y \ge ||z|+k|, y-z \ge ||x|+k| \Rightarrow x-z \ge ||x|+k|+||z|+k| \Rightarrow |x+(-z)| \ge ||x|+k|+||-z|+k|$ **(2)**

Se observă că inegalitatea (2) este falsă dacă $k>0$, iar în cazul când $k=0$, ea are loc $\Leftrightarrow xz \le 0 \Leftrightarrow x \ge 0$ şi $z \le 0$.

În acest caz din inegalitățile (1) obținem:

$x-y \ge -z$ şi $y-z \ge x \Rightarrow x \ge y-z \ge x \Rightarrow x=y-z \Rightarrow y=x+z \Rightarrow$ sistemul de inecuații devine: $\begin{cases} a^2+x^4 \le 2ax^2 \\ a^2+y^4 \le 2a(x-z)^2 \\ a^2+z^4 \le 2az^2 \end{cases}$, de unde obținem $\begin{cases} x^2=z^2=a \\ a^2+y^4 \le 2a(x-z)^2 \end{cases} \Rightarrow$ şi cum

$x-z \ne 0$, deoarece în caz contrar $\Rightarrow a^2 \le 0 \Rightarrow (x,y,z)=(\sqrt{a},0,-\sqrt{a})$.

În concluzie:

-dacă $k>0$, sistemul nu are soluție;

-dacă $k=0$, sistemul are soluțiile

$\left(0,\sqrt{a},-\sqrt{a}\right),\left(0,-\sqrt{a},\sqrt{a}\right),\left(\sqrt{a},0,-\sqrt{a}\right),\left(-\sqrt{a},0,\sqrt{a}\right),$
$\left(\sqrt{a},-\sqrt{a},0\right),\left(-\sqrt{a},\sqrt{a},0\right).$

Tot la Olimpiada de Matematică din Rusia, clasa a X-a, 2002 a fost propusă următoarea problemă :

Problema 2

Numerele pozitive a,b,c satisfac relația $a+b+c=3.$ Arătați că
$\sqrt{a+}\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca.$

Generalizare

Dacă numerele pozitive a,b,c satisfac relația $a+b+c=3$ şi $k\in\mathbb{N},k\geq 2,$ atunci arătați că $\sqrt[k]{a^{k-1}}+\sqrt[k]{b^{k-1}}+\sqrt[k]{c^{k-1}}\geq ab+bc+ca.$

Soluție

Folosim inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică:

$$a^2+k\sqrt[k]{a^{k-1}}\geq(k+1)\sqrt[k+1]{a^2\cdot\left(\sqrt[k]{a^{k-1}}\right)^k}=(k+1)a$$
$$\Rightarrow\sum a^2+k\sum\sqrt[k]{a^{k-1}}\geq 3\sum a+(k-2)\sum a$$
$$\Rightarrow\sum a^2+k\sum\sqrt[k]{a^{k-1}}\geq\left(\sum a\right)^2+3(k-2)$$
$$\Rightarrow k\sum\sqrt[k]{a^{k-1}}\geq 2\sum ab+3(k-2)\qquad\textbf{(1)}$$

Din $a+b+c=3\Rightarrow\sum a^2+2\sum ab=9$
$$\Rightarrow 9\geq\sum(2a-1)+2\sum ab\Rightarrow\sum ab\leq 3\qquad\textbf{(2)}$$

Din **(1)** şi **(2)** $\Rightarrow k\sum\sqrt[k]{a^{k-1}}\geq 2\sum ab+(k-2)\sum ab=k\sum ab\Rightarrow\sum\sqrt[k]{a^{k-1}}\geq\sum ab$

Rafinare

Numerele pozitive a,b,c satisfac relația $a+b+c=3.$ Arătați că

$$\frac{9M}{2}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-ab-bc-ca\geq\frac{\left(3+2\sqrt{3}\right)m}{2},\text{ unde}$$
$$m=\min\left\{\left(\sqrt{a}-1\right)^2,\left(\sqrt{b}-1\right)^2,\left(\sqrt{c}-1\right)^2\right\}\text{ şi }M=\max\left\{\left(\sqrt{a}-1\right)^2,\left(\sqrt{b}-1\right)^2,\left(\sqrt{c}-1\right)^2\right\}$$

Soluție

În so9luția dată mai sus pentru $k=2$ am arătat că $a^2+2\sqrt{a}\geq 3a$ .Aceasta ne sugerează să scriem expresia $a^2+2\sqrt{a}-3a$ într-o altă formă.

Deoarece $a^2+2\sqrt{a}-3a=a^2-a+2\sqrt{a}-2a=$
$$=a(a-1)-2\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)=\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a\left(\sqrt{a}+1\right)-2\sqrt{a}\right)=$$
$$=\left(\sqrt{a}-1\right)\left[\sqrt{a}(a-1)+a-\sqrt{a}\right]=\left(\sqrt{a}-1\right)\left[\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)+\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)\right]=$$

$=\left(\sqrt{a}-1\right)^2\left(a+2\sqrt{a}\right)\geq 0$ şi $\sum\sqrt{a}\leq\sum\frac{a+1}{2}=3\Rightarrow$

$\sum\left(a^2+2\sqrt{a}-3a\right)=\sum a^2+2\sum\sqrt{a}-3\sum a=\sum a^2+2\sum\sqrt{a}-\left(\sum a\right)^2=2\sum\sqrt{a}-2\sum ab\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-ab-bc-ca=\frac{\sum\left(a^2+2\sqrt{a}-3a\right)}{2}\leq\frac{M}{2}\left(\sum a+2\sum\sqrt{a}\right)\leq\frac{9M}{2}$

Cum $\sum\sqrt{a}=\sqrt{\left(\sum\sqrt{a}\right)^2}=\sqrt{3+2\sum\sqrt{ab}}\geq\sqrt{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-ab-bc-ca\geq\frac{m}{2}\left(\sum a+2\sum\sqrt{a}\right)=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}m.$

Cazuri particulare

1. Determinați tripletele de numere reale $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, ce satisfac relațiile:

$1+\left(|x|+1\right)^4\leq 2(y-z)^2, 1+\left(|y|+1\right)^4\leq 2(x-z)^2, 1+\left(|z|+1\right)^4\leq 2(x-y)^2.$

2. Determinați tripletele de numere reale $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, ce satisfac relațiile:

$4+x^4\leq 4(y-z)^2, 4+y^4\leq 4(x-z)^2, 4+z^4\leq 4(x-y)^2.$

3. Determinați tripletele de numere reale $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, ce satisfac relațiile:

$9+\left(|x|+k\right)^4\leq 6(y-z)^2, 9+\left(|y|+k\right)^4\leq 6(x-z)^2, 9+\left(|z|+k\right)^4\leq 6(x-y)^2, k\geq 0.$

4. Dacă numerele pozitive a,b,c satisfac relația $a+b+c=3$ atunci arătați că

$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}\geq ab+bc+ca.$

5. Dacă numerele pozitive a,b,c satisfac relația $a+b+c=3$ atunci arătați că

$\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{c^3}\geq ab+bc+ca.$