Generalizări ale unor probleme date la Olimpiadele de Matematică

Ion Bursuc

Motto: Iar el, răspunzând, a zis: Să iubeşti pe Domnul Dumnezeul tău din toată inima ta şi din tot sufletul tău şi din toată puterea ta şi din tot cugetul tău, iar pe aproapele tău ca pe tine însuți.
(Luca ,cap.10,v.27)

1.Dacă ecuația de gradul al doilea cu coeficienți întregi $ax^2+bx+c=0$ are rădăcini raționale nenule atunci $b^2\le(ac+1)^2$.

(I. Cucurezeanu, OJ, Constanța, 1993)

Generalizare:
Dacă ecuația de gradul al doilra cu coeficienți întregi $ax^2+bx+c=0$ are rădăcini raționale nenule şi $p\in\mathbb{N}^*$ cu $p\,|\,(b,ac)$ atunci $b^2\le\left(\frac{ac}{p}+p\right)^2$.

Soluție:
Cazul I : $ac>0$. Cum ecuația are rădăcini raționale$\Rightarrow b^2-4ac=k^2$ cu $k\in\mathbb{N},|k|<|b|\Rightarrow k=|b|-r,r\in\mathbb{N}$. Egalitatea $b^2-4ac=k^2$ devine:

$b^2-(|b|-r)^2=4ac\Leftrightarrow r(2|b|-r)=4ac\Rightarrow 2\,|\,r\Rightarrow(\exists)r\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $r=2r\Rightarrow r(|b|-r)=ac$.

Cum $p\,|\,ac\Rightarrow p\,|\,s\Rightarrow(\exists)q\in\mathbb{N}$ astefel încât $r=pq\Rightarrow k=|b|-r=|b|-2pq\le|b|-2p$

$\Rightarrow b^2-4ac\le(|b|-2p)^2\Leftrightarrow-4ac\le-4p|b|+4p^2\Rightarrow|b|\le\frac{ac}{p}+p\Leftrightarrow b^2\le\left(\frac{ac}{p}+p\right)^2$.

Cazul II : $ac<0$. Cum ecuația are rădăcini raționale$\Rightarrow b^2-4ac=k^2$ cu $k\in\mathbb{N},|k|>|b|\Rightarrow k=|b|+r,r\in\mathbb{N}^*$. Relația $b^2-4ac=k^2$ devine: $r(2|b|+r)=-4ac\Rightarrow(\exists)r\in\mathbb{N}^*$ astefel încât $r=2pr\Rightarrow k=|b|+r>|b|+2p\Rightarrow b^2-4ac\ge(|b|+2p)^2$

$\Leftrightarrow-4ac\ge4p|b|+4p^2\Rightarrow|b|\le-\frac{ac}{p}-p\Rightarrow b^2\le\left(\frac{ac}{p}+p\right)^2$.

2.Să se determine funcția strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astefel încât $f(x+f(y))=f(x+y)+1,(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

(Etapa Județeană, Harghita, 1993)

Generalizare:
Fie funcția bijectivă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se determine funcşia strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astefel încât $f(g(x)+f(y))=f(x+y)+a,(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

Soluție:
Înlocuind x cu y şi y cu x obținem
$f(g(y)+f(x))=f(g(x)+f(y))=f(x+y)+a,(\forall)x,y\in\mathbb{R}$ şi cum a f este injectivă fiind strict crescătoare$\Rightarrow g(y)+f(x)=g(x)+f(y),(\forall)x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=g(x)+f(0)-g(0),(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Relația din enunț devine:
$f(g(x)+f(0))=g(x)+f(0)-g(0)+a,(\forall)x\in\mathbb{R}$. Cum g este bijectivă pentru orice $y\in\mathbb{R}$ există $x\in\mathbb{R}$ astefl încât

$g(x)=y-f(0)\Rightarrow f(y)=y+a-g(0),(\forall)y\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=x+b,(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ că ecuația funcțională din enunț admite soluție $\Leftrightarrow g$ este funcție $\Rightarrow f(x)=x+a-g(0),(\forall)x\in\mathbb{R}$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că
$(\forall)x,y\in\mathbb{R}, f^3(x+y)+f^3(x-y)=\left(f(x)+f(y)\right)^3+\left(f(x)-f(y)\right)^3$. Să se demonstreze că
$f(x+y)=f(x)+f(y),(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

(Etapa locală, Bucureşti, 1991)

<u>Generalizare:</u>
Fie funcțiile $f,g,h:\mathbb{R}$ cu proprietatea că h' impară , g şi h injective şi
$g(a)+h(a)=g(2a)+h(0)\Rightarrow a=0$. Dacă
$g\left(f(x+y)\right)+h\left(f(x-y)\right)=g\left(f(x)+f(y)\right)+h\left(f(x)-f(y)\right),x,y\in\mathbb{R}$, atunci
$f(x+y)=f(x)+f(y),(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

<u>Soluție:</u>
Pentru $x=y=0\Rightarrow g\left(f(0)\right)+h\left(f(0)\right)=g\left(2f(0)\right)+h(0)\Rightarrow f(0)=0$.
Pentru $x=0\Rightarrow g\left(f(y)\right)+h\left(f(-y)\right)=g\left(f(y)\right)+h\left(-f(y)\right),(\forall)y\in\mathbb{R}$ şi cum h este injectivă $\Rightarrow f(-y)=-f(y),(\forall)y\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este impară.
Înlocuind x cu y şi y cu x obținem:
$g\left(f(x+y)\right)-h\left(f(x-y)\right)=g\left(f(x)+f(y)\right)-h\left(f(x)-f(y)\right),(\forall)x,y\in\mathbb{R}$ şi prin adunare cu relația din
enunț $\Rightarrow g\left(f(x+y)\right)=g\left(f(x)+f(y)\right),(\forall)x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y),(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

4. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea
$f(x+y)=\max\left\{f(x),y\right\}+\min\left\{f(y,x)\right\},(\forall)x,y\in\mathbb{R}.$

(Concursul”Traian Lalescu”, 1992)

<u>Generalizare:</u>
Fie $\alpha,\beta>0$ cu $\alpha\geq\beta$. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea
$$\frac{\alpha+\beta}{2}f(x+y)=\alpha\max\left\{f(x),y\right\}+\beta\min\left\{f(y),x\right\},(\forall)x,y\in\mathbb{R}.$$

<u>Soluție:</u>
<u>Cazul I</u> $\alpha=\beta$
Egalitatea din enunț devine:
$f(x+y)=\max\left\{f(x),y\right\}+\min\left\{f(y),x\right\},(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.
Pentru x înlocuind cu y şi y cu x $\Rightarrow f(x+y)\max\left\{f(y),x\right\}+\min\left\{f(x),y\right\},x,y\in\mathbb{R}$.
Prin adunare $\Rightarrow 2f(x+y)=x+y+f(x)+f(y),(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.
Pentru $y=0\Rightarrow f(x)=x+f(0),(\forall)x\in\mathbb{R}(1)$
Fie $f(0)=a\Rightarrow f(a)=\max\left\{f(a),0\right\}+\min\left\{a,a\right\}$.
Dacă $f(a)>0\Rightarrow f(a)=f(a)+a\Rightarrow a=0\Rightarrow f(0)>0\Rightarrow a>0$ (fals).
Dacă $f(a)<0\Rightarrow f(a)=0+a\Rightarrow din(1)\Rightarrow f(a)=a+a\Rightarrow a=2a\Rightarrow a=0$
$\Rightarrow f(0)<0\Rightarrow a<0$ (fals).
Prin urmare $f(0)=0\Rightarrow f(x)=x,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

<u>Cazul II</u> $\alpha>\beta$
Vom demonstra egalitatea $\alpha\max\left\{a,b\right\}+\beta\min\left\{a,b\right\}\max\left\{\alpha a+\beta b,\alpha b+\beta a\right\}$.

Cum $(\alpha a+\beta b)-(\alpha b+\beta a)=(\alpha-\beta)a-(\alpha-\beta)b=(\alpha-\beta)(a-b)\Rightarrow$ egalitatea de mai sus.
Înlocuind în relația din enunț pe x cu y și y cu x obținem:
$\frac{\alpha+\beta}{2} f(x+y)=\alpha\max\{f(y),x\}+\beta\min\{f(x),y\},(\forall)x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow(\alpha+\beta)f(x+y)=$
$=\max\{\alpha f(x)+\beta y,\alpha y+\beta f(x)\}+\max\{\alpha f(y)+\beta x,\alpha x+\beta f(y)\},(\forall)x,y\in\mathbb{R}(2)$.
Pentru $x=0\Rightarrow(\alpha+\beta)f(0)=2\max\{\alpha f(0)+\beta f(0)\}$.
Dacă $f(0)>0\Rightarrow(\alpha+\beta)f(0)=2\alpha f(0)\Rightarrow(\beta-\alpha)f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$ (fals).
Dacă $f(0)<0\Rightarrow(\alpha+\beta)f(0)=2\beta f(0)\Rightarrow(\alpha-\beta)f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$ (fals).
$\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow(\alpha+\beta)f(x)=\max\{\alpha f(x),\beta f(x)\}+\max\{\alpha x,\beta x\},(\forall)x\in\mathbb{R}(3)$.
Înlocuind în relația din enunț $y=0\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{2}f(x)=\alpha\max\{0,x\}+\beta\min\{f(x),0\},(\forall)x\in\mathbb{R}$.
Dacă $x>0$ și $f(x)<0\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{2}f(x)=\alpha x+\beta f(x)\Rightarrow\frac{\alpha-\beta}{2}f(x)=\alpha x$ (fals).
Dacă $x<0$ și $f(x)>0\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{2}f(x)=0\Rightarrow f(x)=0$ (fals).
Prin urmare avem: $\begin{array}{l} x>0\Rightarrow f(x)\geq 0 \\ x<0\Rightarrow f(x)\leq 0 \end{array}$.
Dacă $x>0$ din (3)$\Rightarrow(\alpha+\beta)f(x)=\alpha f(x)+\beta x\Rightarrow f(x)=x$.
Dacă $x<0$ din (3)$\Rightarrow(\alpha+\beta)f(x)=\beta f(x)+\alpha x\Rightarrow f(x)=x\Rightarrow f(x)=x,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

5. Se consideră ecuația $x^2-(a^2+a+b)x+b^2+b+a=0$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Să se arate că dacă $a^2-b^2>1$, atunci ecuația are rădăcini reale și distincte.

(Etapa județeană, Buzău, 1996)

<u>Generalizare</u>

Se consideră ecuația $x^2-(a^2+\alpha a+\beta b)x+b^2+k\beta b+k\alpha a=0$, unde $a,b,\alpha,\beta,k\in\mathbb{R}$, $k>0$. Să se arate că dacă $a^2-b^2>k$, atunci ecuația are rădăcini reale și distincte.

<u>Soluție</u>

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(a^2+\alpha a+\beta b)x+kb^2+k\alpha a+k\beta b$. Trebuie să arătăm că $\Delta>0$.
Dacă presupunem că $\Delta\leq 0$, atunci $f(x)\geq 0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(k)\geq 0\Rightarrow$
$k^2-(a^2+\alpha a+\beta b)k+kb^2+k\alpha a+k\beta b\geq 0\Rightarrow k^2-ka^2+kb^2\geq 0\Rightarrow a^2-b^2\leq k$ ceea ce este fals.
Prin urmare concluzia problemei este adevărată.

6. Se dă ecuația $x^2-(2m+1)x+m^2$, unde $m\in\mathbb{N}$, cu rădăcinile $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$. Să se arate că intervalul (x_1,x_2) conține cel mult un număr natural pătrat perfect.

(S. Stan, Etapa județeană, Constanța)

<u>Generalizare</u>

Se dă ecuația $x^2-ax+b=0$, unde $a,b\in\mathbb{N}$, $a>0$ cu rădăcinile $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$ și $a^2>4b\geq(a-1)^2$. Să se arate că intervalul (x_1,x_2) conține cel mult un număr natural pătret perfect.

<u>Soluție</u>

Deoarece $x^2-ax+b=0 \Rightarrow$ că rădăcinile x_1,x_2 sunt reale. Cum $x_1+x_2=a>0$ şi $x_1\cdot x_2=b>0$ $\Rightarrow$ $x_1,x_2\geq 0$. Să presupunem că există $k\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $x_1<k^2<(k+1)^2<x_2$. În aceste condiții, cum $x_1,x_2\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1}<k<k+1<\sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}>1(1)$. Deoarece

$\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)^2=x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=a-2\sqrt{b}=a-1-2\sqrt{b}+1=\dfrac{(a-1)^2-4b}{a-1+2\sqrt{b}}+1\leq 1$, pentru $b>0$ şi

$\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)^2=a\leq 1$, dacă $b=0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\leq 1$, ceea ce este în contradicție cu relația (1).

7. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, astfel încât $b^{2<}<4ac$. Să se arate că dacă $4a+2b+c>0$, atunci $a+2b+4c>0$.

(B. Enescu, Etapa județeană; Brăila)

Generalizare

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, astfel încât $b^2<4ac$. Să se arate că dacă există $x_0,y_0\in\mathbb{R}$ şi $\alpha,\beta\geq 0$ astfel încât $a\left(\alpha\cdot {x_0}^2+\beta\cdot {y_0}^2\right)+b\left(\alpha\cdot x_0+\beta\cdot y_0\right)+c(\alpha+\beta)>0$, atunci $a+k\cdot b+k^2\cdot c>0$, $(\forall)k>0$.

Soluție

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$. Cum $\Delta=b^2-4ac<0$ $\Rightarrow$ f are semn constant.

Deoarece relația $a\left(\alpha\cdot {x_0}^2+\beta\cdot {y_0}^2\right)+b\left(\alpha\cdot x_0+\beta\cdot y_0\right)+c(\alpha+\beta)>0$ se scrie

$\alpha f(x_0)+\beta f(y_0)>0$ $\Rightarrow$ că cel puțin unul dintre numerele $f(x_0)$ sau $f(y_0)$ este >0 $\Rightarrow$

$f\left(\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{a+bk+ck^2}{k^2}>0$.

8. Să se arate că dacă $z\in\mathbb{C}$, $|z|=1$, atunci: $\sqrt{3}\leq|1+z|+\left|1-z+z^2\right|\leq\dfrac{13}{4}$.

(O. Pop, Etapa județeană, Satu Mare, 1996)

Generalizare

Să se arate că dacă $z\in\mathbb{C}$, $|z|=1$, atunci $m\leq\alpha|1+z|+\beta\left|1-z+z^2\right|\leq M$, unde

$m=\min\left\{\alpha\sqrt{2+a},\beta(2+a)\right\}$, $M=\max\left\{(2+a)\beta+\dfrac{\beta^2}{4\beta},2\alpha+2\beta-a\beta\right\}$ şi $a\in(-2,2)$, $\alpha,\beta>0$.

Soluție

Notăm $|1+z|=x\geq 0$. Cum $x\leq|1|+|x|=2\Rightarrow x\in[0,2]$. Din relația

$x=|1+z|\Rightarrow x^2=|1+z|^2=(1+z)\left(1+\overline{z}\right)=1+|z|^2+z+\overline{z}=2+2\operatorname{Re}z$

$\Rightarrow\left|1-az+z^2\right|=\left|\dfrac{1-az+z^2}{z}\right|=\left|z+\dfrac{1}{z}-a\right|=\left|z+\overline{z}-a\right|=|2\operatorname{Re}z-a|=\left|x^2-2-a\right|$. Notez

$\alpha|1+z|+\beta\left|1-az+z^2\right|=S\Rightarrow S=\alpha x+\beta\left|x^2-2-a\right|$.

Cazul I $x\in\left[0,\sqrt{2+a}\right]$

În acest caz avem

$S=\alpha x+\beta\left(x^2-2-a\right)=-\beta\left(x^2-\dfrac{\alpha}{\beta}x-2-a\right)=-\beta\left[\left(x-\dfrac{\alpha}{2\beta}\right)^2-2a-\dfrac{\alpha^2}{4\beta^2}\right]=(2+a)\beta+\dfrac{\alpha^2}{2\beta}-\beta\left(x-\dfrac{\alpha}{2\beta}\right)^2\Rightarrow$

$S \le (2+a)\beta + \dfrac{\alpha^2}{4\beta}$ şi $S \ge k$, unde $k = \min(p,q)$, $p = (2+a)\beta + \dfrac{\alpha^2}{4\beta} - \beta\left(0 - \dfrac{\alpha}{2\beta}\right)^2 = (2+a)\beta$,

$q = (2+a)\beta + \dfrac{\alpha^2}{4\beta} - \beta\left(\sqrt{2+a} - \dfrac{\alpha}{2\beta}\right)^2 = \alpha\sqrt{2+a}$.

Cazul II $x \in \left[\sqrt{2+a}, 2\right]$

În acest caz avem: $S = \alpha x + \beta\left(x^2 - 2 - a\right) = \beta x^2 + \alpha x - (2+a)\beta$. Cum funcția

$f : \left[\sqrt{2+a}, 2\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \beta x^2 + \alpha x - (2+a)\beta$ este strict crescătoare $\Rightarrow$

$f\left(\sqrt{2+a}\right) \le S \le f(2)$.

Deoarece $f\left(\sqrt{2+a}\right) = \beta(2+a) + \alpha\sqrt{2+a} - (2+a)\beta = \alpha\sqrt{2+a}$ şi

$f(2) = 4\beta + 2\alpha - (2+a)\beta = 2\beta + 2\alpha - a\beta \Rightarrow \alpha\sqrt{2+a} \le S \le 2\alpha + 2\beta - a\beta$.

În concluzie avem: $\min\left\{\alpha\sqrt{2+a}, \beta(2+a)\right\} \le S \le \max\left\{(2+a)\beta + \dfrac{\alpha^2}{4\beta}, 2\alpha + 2\beta - a\beta\right\}$.

9.Fie $z_1 \in \mathbb{C}$ astfel încât $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$, $(\forall) z_2 \in \mathbb{C}$, cu $1 + z_1 z_2 \ne 0$ şi $|z_2| = 1$. Să se arate că $|z_1| = 1$.

(D. Buşneag, C. I. Gh. Țițeica, 1991)

Generalizarea 1

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $1 + z_1 z_2 \ne 0$.

Arătați că $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R} \iff \left(1 - |z_2|^2\right) z_1 + \left(1 - |z_1|^2\right) z_2 \in \mathbb{R}$

Soluție

$\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \overline{\left(\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right)} \iff (z_1 + z_2)(1 + z_1 z_2) = \left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)(1 + z_1 z_2)$

$\iff z_1 + z_2 + z_1 \overline{z_1}\,\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = z_1 + z_2 + z_1 \overline{z_1} z_2 + z_1 z_2 \overline{z_2} \iff$

$z_1 + z_2 + |z_1|^2 \overline{z_2} + |z_2|^2 \overline{z_1} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + |z_1|^2 z_2 + |z_2|^2 z_1 \iff$

$z_1 + z_2 - |z_2|^2 z_2 - |z_1|^2 z_1 = z_1 + z_2 - |z_2|^2 \overline{z_2} - |z_1|^2 \overline{z_1} \iff \left(1 - |z_2|^2\right) z_1 + \left(1 - |z_1|^2\right) z_2 \in \mathbb{R}$.

Generalizarea 2

Fie $a, b, c, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $c + z_1 z_2 \ne 0$.

Arătați că $\dfrac{a z_1 + b z_2}{c + z_1 z_2} \in \mathbb{R} \iff \left(a\overline{c} - \overline{b}|z_2|^2\right) z_1 + \left(b\overline{c} - \overline{a}|z_1|^2\right) z_2 \in \mathbb{R}$.

Soluție

Folosim proprietatea: $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

Cum $\dfrac{a z_1 + b z_2}{c + z_1 z_2} - \overline{\left(\dfrac{a z_1 + b z_2}{c + z_1 z_2}\right)} = \dfrac{(a z_1 + b z_2)\left(\overline{c} + \overline{z_1}\,\overline{z_2}\right) - (c + z_1 z_2)\left(\overline{a}\,\overline{z_1} + \overline{b}\,\overline{z_2}\right)}{|c + z_1 z_2|^2} =$

$\dfrac{a\overline{c} z_1 + a z_1 \overline{z_1}\,\overline{z_2} + b\overline{c} z_2 + b\overline{z_1} z_2 \overline{z_2}}{|c + z_1 z_2|^2} - \dfrac{\overline{a} c \overline{z_1} + \overline{a}\,\overline{z_1} z_1 z_2 + \overline{b} c \overline{z_2} + \overline{b} z_1 \overline{z_2} z_2}{|c + z_1 z_2|^2} = \dfrac{z - \overline{z}}{|c + z_1 z_2|^2}$, unde

$z = \left(a\overline{c} - \overline{b}|z_2|^2\right) z_1 + \left(b\overline{c} - \overline{a}|z_1|^2\right) z_2 \Rightarrow \dfrac{a z_1 + b z_2}{c + z_1 z_2} \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

10. Fie z_1 şi z_2 două numere complexe şi u una din valorile lui $\sqrt{z_1 z_2}$. Să se arate că $|z_1|+|z_2|=\left|\frac{z_1+z_2}{2}+u\right|+\left|\frac{z_1+z_2}{2}-u\right|$.

(Concursul interjudețean "Gh. Țițeica", 1991)

Generalizare:

Fie z_1 şi z_2 două numere complexe şi u una dintre valorile lui $\sqrt{z_1 z_2}$. Dacă $a,b\in\mathbb{R},\ \ a,b>0$ să se arate că $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}|z_1|+\frac{a+b}{2}|z_2|=\left|\frac{\frac{1}{a}z_1+az_2}{2}+u\right|+\left|\frac{\frac{1}{b}z_1+az_2}{2}-u\right|$.

Soluție:

Fie u, o valoare a lui $\sqrt{z_1}$ şi u_2 o valoare a lui $\sqrt{z_2}$ astfel încât $u_1u_2=u$. Această alegere este posibilă deoarece dacă $u_1^2=z_2\Rightarrow(u_1u_2)^2=z_1z_2$ şi cum $u^2=z_1z_2\Rightarrow u\in\{u_1u_2,-u_1u_2\}=\sqrt{z_1z_2}$.

Dacă u ar fi $-u_1u_2$ se alege pentru u_1 valoarea $-u_1$.Înmulțind ambii membrii ai egalității din enunț cu 2 ab aceasta devine:

$$(a+b)|z_1|+ab(a+b)|z_2|=b\left|z_1+a^2z_2+2au\right|+a\left|z_1+b^2z_2-2bu\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a+b)|z_1|+ab(a+b)|z_2|=b\left|u_1^2+a^2u_2^2+2au_1u_2\right|+a\left|u_1^2+b^2u_2^2-2bu_1u_2\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a+b)|z_1|+ab(a+b)|z_2|=b|u_1+au_2|^2+|u_1+bu_2|^2\ (1).$$

Este cunoscută egalitatea:

$|z_1+z_2|=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right),(\forall)\,z_{1,}\,z_2\in\mathbb{C}$. Folosind această egalitate putem scrie:

$$|u_1+au_2|^2=|u_1|^2+a^2|u_2|^2+2a\operatorname{Re}(u_1u_2)(2)$$

$$|u_1-bu_2|^2=|u_1|^2+b^2|u_2|^2-2b\operatorname{Re}\left(u_1\overline{u_2}\right)(3).$$

Din relațiile (2) şi (3) obținem:

$b|u_1+au_2|^2+a|u_1-bu_2|^2=(a+b)|u_1|^2+ab(a+b)|u_2|^2=(a+b)|z_1|+ab(a+b)|z_2|$, adică relația (1).

11. Arătați că dacă $\lambda,u,a,b>0$ şi $z_{1,}\,z_2$ sunt două numere complexe, iar u este una dintre valorile lui $\sqrt{z_1z_2}$, atunci $\frac{\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}}{\lambda+\mu}|z_1|+\frac{\mu a+\lambda b}{\lambda+\mu}|z_2|\le\left|\frac{\frac{\lambda}{a}z_1+\mu az_2}{\lambda+\mu}+u\right|+\left|\frac{\frac{\lambda}{b}z_1+\lambda b}{\lambda+\mu}-u\right|$.

Soluție:

Înmulțind ambii membrii ai inegalității cu $(\lambda+\mu)ab$ aceasta devine:

$(\lambda b+\mu a)|z_1|+(\mu a+\lambda b)ab|z_2|\le b\left|\lambda z_1+\mu a^2z_2+u(\lambda+\mu)a\right|+a\left|\mu z_1+\lambda b^2z_2-ub(\lambda+\mu)\right|(1)$. Dacă u_1 este o valoare a lui $\sqrt{z_1}$ şi u_2 o valoare a lui $\sqrt{z_2}$ astfel încât $u_1u_2=u$, atunci avem:

$\left|\lambda z_1+\mu a^2z_2+u(\lambda+\mu)a\right|=\left|\mu u_1^2+\mu a^2u_2^2+(\lambda+\mu)au_1u_2\right|=\left|(u_1+au_2)(\lambda u_1+\mu au_2)\right|$. Analog avem $\left|\mu z_1+\lambda b^2z_2-ub(\lambda+\mu)\right|=\left|\mu u_1^2+\lambda b^2u_2^2-(\lambda+\mu)bu_1u_2\right|=\left|(u_1-bu_2)(\mu u_1-\lambda bu_2)\right|$.

Inegalutatea (1) devine:

$$(\lambda b+\mu a)|z_1|+(\mu a+\lambda b)ab|z_2|\le b\left|(u_1+au_2)(\lambda u_1+\mu au_2)\right|+a\left|(u_1-bu_2)(\mu u_1-\lambda bu_2)\right|.$$

În continuare vom demonstra următoarea temă. Pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ şi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$|z_1+z_2|\cdot|\lambda z_1+\mu z_2|=\sqrt{\left[\lambda|z_1|^2+\mu|z_2|^2+(\lambda+\mu)\operatorname{Re}\left(z_1,\overline{z_2}\right)\right]^2+(\lambda-\mu)^2\left(\operatorname{Im} z_1\overline{z_2}\right)^2}.$$

Soluție:

Se observă că

$$|z_1+z_2|^2\cdot|\lambda z_1+\mu z_2|^2=\left(|z_1|^2+|z_2|+2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}\right)\left(\lambda^2|z_1|^2+\mu^2|z_2|^2+2\lambda\mu\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}\right)=$$

$$=\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\left(\lambda^2|z_1|^2+\mu^2|z_2|^2\right)+2\left(\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}\right)\left(\lambda^2|z_1|^2+\mu^2|z_2|^2+\lambda\mu|z_2|^2\right)+4\lambda\mu\left(\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}\right)^2=$$

$$=\lambda^2|z_1|^4+\mu^2|z_2|^4+\left(\lambda^2+\mu^2\right)|z_1|^2|z_2|^2+2\left(\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}\right)(\lambda+\mu)\left(\lambda|z_1|^2+\mu|z_2|^2\right)+4\lambda\mu\left(\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}\right)^2=$$

$$=\left(\lambda|z_1|^2+\mu|z_2|\right)^2+(\lambda-\mu)^2|z_1|^2|z_2|^2+2\left[\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)(\lambda+\mu)\left(\lambda|z_1|^2+\mu|z_2|^2\right)\right]+(\lambda+\mu)^2\left(\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}\right)^2-$$

$$-(\lambda-\mu)^2\left(\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}\right)^2=\left[\lambda|z_1|^2+\mu|z_2|^2+(\lambda+\mu)\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)\right]^2+(\lambda-\mu)^2\left(|z_1z_2|^2-\operatorname{Re}^2\left(z_1\overline{z_2}\right)\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ egalitatea din enunț. Din egalitatea demonstrată deducem că

$$b\left(|u_1+au_2|\right)\left(|\lambda u_1+\mu au_2|\right)\geq b\left[\lambda|u_1|^2+\mu|au_2|^2+(\lambda+\mu)\operatorname{Re}\left(au_1,\overline{u_2}\right)\right]=\lambda b|z_1|+a^2b\mu|z_2|+ab(\lambda+\mu)\operatorname{Re} u_1\overline{u_2}\ (3)$$

şi $a\left|(u_1-bu_2)(\mu u_1-\lambda bu_2)\right|\geq a\left[\mu|u_1|^2+\lambda|-bu_2|^2-(\lambda+\mu)\operatorname{Re}\left(-bu_1\overline{u_2}\right)\right]=$

$$=a\mu|z_1|+ab^2\lambda\left|z_2-ab(\lambda+\mu)\operatorname{Re}\left(u_1\overline{u_2}\right)\right|(4).$$

Adunând inegalitățile (3) şi (4) se obține inegalitatea (2). Egalitatea în inegalitatea din enunț are loc dacă şi numai dacă $\lambda=\mu$ sau $z_1\overline{z_2}\in\mathbb{R}$.

12. Fie $x, y, z\in\mathbb{C}$ astfel încât $|x|=3, |y|=4, |z|=5$ şi $x+y+z=0$. Demonstrați că $16x^2+9y^2=0$.

(L. Panaitopol, Etapa locală Bucureşti, 1996)

Generalizare:

Fie $x, y, z\in\mathbb{C}$ şi $a, b, c>0$ astfel încât $|x|=a, |y|=b, |z|=c$ şi $x+y+z$. Demonstrați că $b^2x^2+a^2y^2=\left(c^2-a^2-b^2\right)xy$.

Soluție:

Cum $|x|^2=a^2\Rightarrow x\cdot\overline{x}=a^2\Rightarrow\overline{x}=\dfrac{a^2}{x}$

Analog $\overline{y}=\dfrac{b^2}{y}$ şi $\overline{z}=\dfrac{c^2}{z}$. Din relația

$$\overline{x+y+z}=0\Rightarrow\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}=0\Rightarrow\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}-\frac{c^2}{x+y}=0\Rightarrow\frac{a^2}{x}(x+y)+\frac{b^2}{y}(x+y)=c^2$$

$$\Rightarrow a^2y^2+b^2x^2=\left(c^2-a^2-b^2\right)xy.$$

13. Fie $p, q\in\mathbb{C}, q\neq 0$. Ştiind că ecuația $x^2+px+q^2=0$ are rădăcinile de acelaşi modul, să se arate că umărul $\dfrac{p}{q}$ este real.

Generalizare:

Fie $p, q\in\mathbb{C}, q\neq 0$ şi $a, b\in\mathbb{C}^*$ astfel încât $\dfrac{b}{a^2}\in\mathbb{R}, \dfrac{b}{a^2}>0$. Ştiind că ecuația $x^2+apx+bq^2=0$ are rădăcinile de acelaşi modul, să se arate că $\dfrac{p}{q}\in\mathbb{R}$.

Soluție:

Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaşiei de acelaşi modul r.

Din relația lui Viete $\Rightarrow x_1 + x_2 = -ap$

$$x_1x_2 = bq^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{\left(-\frac{x_1+x_2}{a}\right)^2}{\frac{x_1x_2}{b}} = \frac{b}{a^2}\cdot\frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{b}{a}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2\right) =$$

$$= \frac{b}{a^2}\left(\frac{x_1\overline{x_2}}{|x_2|^2} + \frac{x_2\overline{x_1}}{|x_1|^2} + 2\right) = \frac{b}{a^2}\left[\frac{2\operatorname{Re}\left(x_1\overline{x_2}\right)}{r^2} + 2\right] \in \mathbb{R}.$$

Cum $\left|x_1\overline{x_2}\right| = r^2 \Rightarrow \left|\operatorname{Re}\left(x_1\overline{x_2}\right)\right| \le r^2 \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(x_1\overline{x_2}\right)}{r^2} + 1 \ge 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} \in [0,\infty) \Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{R}.$

14. Să se demonstreze că dacă $p,q,r \in \mathbb{Q}$ şi $pq+qr+pr=1$ atunci $\sqrt{\left(1+p^2\right)\left(1+q^2\right)\left(1+r^2\right)} \in \mathbb{Q}$.

(Revista Kvant, Etapa județeană, Mehedinți, 1996)

Generalizare:

Să se demonstreze că dacă $p,q,r,k \in \mathbb{Q}$ şi $q+qr+rp+k(p+q+r) = A$, atunci

$\sqrt{\left(A+p^2+kp+k^2\right)\left(A+q^2+kq+k^2\right)\left(A+r^2+kr+r^2\right)} \in \mathbb{Q}$.

Soluție:

Se observă că

$$A+p^2+kp+k^2 = \left(pq+qr+rp+p^2\right)+k(p+q+r)+kp+k^2 = (p+q)(p+r)+k(p+q)+k(p+r)+k^2 =$$

$$=(p+q+r)(p+r+k)(1)$$

Analog avem $A+q^2+kq+k^2 = (q+p+k)(q+r+k)(2)$ şi

$$A+r^2+kr+k^2 = (r+p+k)(r+q+k)(3) \Rightarrow \sqrt{\left(A+p^2+kp+k^2\right)\left(A+q^2+kq+k^2\right)\left(A+r^2+kr+k^2\right)} =$$

$$=(p+q+k)(q+r+k)(r+p+k) \in \mathbb{Q}.$$

15. Să se determine numerele naturale n pentru care ecuația

$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+...+\sqrt{x+n} = \sqrt{x+n+1}$ are soluție.

(L. Panaitopol, Etapa națională, Vâlcea, 1991)

Generalizare:

Fie $(a_n)_{n\ge1}$ un şir strict crescător de numere pozitive astefl încât $\sqrt{a_2-a_1}+\sqrt{a_n-a_1} > \sqrt{a_{n+1}}$ are soluție.

Soluție:

Pentru $n=1$ ecuația devine $\sqrt{x+a_1} = \sqrt{x+a_2}$ care evident nu are soluție.

Pentru $n=2$ ecuația devine:

$$\sqrt{x+a_1}+\sqrt{x+a_2} = \sqrt{x+a_3} \Leftrightarrow x+a_1+x+a_2+2\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)} = x+a_3, x \ge -a_1 \Leftrightarrow$$

$4(x+a_1)(x+a_2) = (k-x)^2, x \in [-a,k]$, unde

$$k = a_3-a_1-a_2 \Rightarrow 3x^2+2(a_1+a_2+a_3)x+4a_1a_2-k^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(a_1+a_2+a_3)+\sqrt{(a_1+a_2+a_3)^2-12a_1a_2+3k^2}}{3} =$$

$$= \frac{-(a_1+a_2+a_3)+\sqrt{2\left[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_4)^2\right]}}{3}$$

Vom arăta că soluția găsită aparține intervalului $\left[-a_1, k\right]$. Inegalitatea $x \geq -a$, se scrie:

$$2\left[\left(a_2-a_1\right)^2+\left(a_3-a_2\right)^2+\left(a_3-a_1\right)^2\right] \geq \left[\left(a_2-a_1\right)+\left(a_3-a_1\right)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(a_2-a_1\right)^2+\left(a_3-a_1\right)^2+2\left(a_3-a_2\right)^2 \geq 2\left(a_2-a_1\right)\left(a_3-a_1\right)$ inegalitate adevărată.

Pentru $n \geq 3$ vom considera funcția

$f:\left[-a,\infty\right) \to \mathbb{R},\ f\left(x\right)=\sqrt{x+a_1}+\sqrt{x+a_2}+...+\sqrt{x+a_{n-1}}-\dfrac{a_{n+1}-a_n}{\sqrt{x+a_{n+1}}+\sqrt{x+a_n}}$. Se observă că funcția f este strict crescătoare şi

$f\left(-a_1\right)=\sqrt{a_2-a_1}+...+\sqrt{a_{n-1}-a_1}-\dfrac{a_{n+1}-a_n}{\sqrt{a_{n+1}-a_1}+\sqrt{a_n-a_1}} \geq \sqrt{a_2-a_1}+\sqrt{a_n-a_1}-\sqrt{a_{n+1}-a_1}>0 \Rightarrow$ f nu se anulează pe intervalul $\left[-a_1,\infty\right) \Rightarrow$ ecuația din enunț nu are soluție.