CREAȚII MATEMATICE SERIA B
ARTICOLE ȘI STUDII ȘTIINȚIFICE

ISSN online 2246-9451

Generalizări ale unor probleme date la Olimpiada de Matematică a Republicii Moldova

de Ion Bursuc

Motto: Iisus le-a răspuns şi a zis: Adevărat, adevărat zic vouă: Mă căutați nu pentru că ați văzut minuni, ci pentru că ați mâncat din pâini şi v-ați săturat.
(Ioan,cap.6,v.26)

1. Să se descompună în factori primi numărul natural $n = 1995 \cdot 2003 \cdot 2005 + 96$.

Soluție:

Dacă notăm $x = 1997$, atunci avem

$$n = (x-2)(x+6)(x+8) + 96 = (x-2)(x^2+14x+48) + 96 =$$

$$x^3 + 14x^2 + 48x - 2x^2 - 28x - 96 + 96 = x^3 + 12x^2 + 20x =$$

$$x(x+2)(x+10) = 1997 \cdot 1999 \cdot 2007 = 3^2 \cdot 223 \cdot 1997 \cdot 1999$$

Generalizare:

Fie numerele naturale a, b, c, x cu $0 < a < b < c, x > a$. Dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a+b+c)^2 - 4bc = k^2$ şi k are aceeaşi paritate cu $-a+b+c$, atunci descompuneți în factori numărul $(x-a)(x+b)(x+c) + abc$.

Soluție:

Se observă că numărul din enunț

$$n = (x-a)(x+b)(x+c) + abc = (x-a)\left[x^2 + (b+c)x + bc\right] + abc$$

$$= x^3 + (b+c)x^2 + bcx - ax^2 - (ab+ac)x - abc + abc$$

$$= x^3 + (b+c-a)x^2 - (ab+ac-bc)x = x\left[x^2 + (b+c-a)x + bc - ab - ac\right]$$

Deoarece $(b+c-a)^2 - 4(bc-ab-ac) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc + 2ac =$

$$(a+b+c)^2 - 4bc = k^2 \Rightarrow n = x\left(x - \frac{a-b-c-k}{2}\right)\left(x - \frac{a-b-c+k}{2}\right).$$

Observația 1 : În cazul particular când $c = 2(b-a)$ obținem

$$(a+b+c)^2 - 4bc = (a+b+2b-2a)^2 - 8b(b-a) = (3b-a)^2 - 8b^2 + 8ab =$$

$$= b^2 + a^2 + 2ab = (a+b)^2 \Rightarrow n = x\left(x - \frac{a-b-2(b-a)-a-b}{2}\right)$$

$$\left(x - \frac{a-b-2(b-a)+a+b}{2}\right) = x\left(x - \frac{2a-4b}{2}\right)\left(x - \frac{4a-2b}{2}\right) =$$

$$x(x-a+2b)(x-2a+b)$$

2. Fie $a > 2, b > 2$ numere reale. Să se demonstreze inegalitatea $\dfrac{a^2}{a-2} + \dfrac{b^2}{b-2} \geq 16$.

Generalizare:

Fie numerele reale strict pozitive $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, $r_1, r_2, \ldots r_n$ şi $a_1 > r_1, a_2 > r_2, \ldots, a_n > r_n$.

Arătați că $\alpha_1\frac{a_1^2}{a_1-r_1}+\alpha_2\frac{a_2^2}{a_2-r_2}+...+\alpha_n\frac{a_n^{\ 2}}{a_n-r_n}\geq 4(\alpha_1 r_1+\alpha_2 r_2+...+\alpha_n r_n)$.

Soluție:

Dacă notăm $a_k-r_k=x_k>0, k\in\{1,2,...,n\}$, atunci avem

$$\alpha_1\frac{a_1^2}{a_1-r_1}+\alpha_2\frac{a_2^2}{a_2-r_2}+\cdots+\alpha_n\frac{a_n^2}{a_n-r_n}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{a_k^2}{a_k-r_k}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{(x_k+r_k)^2}{x_k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x_k+2r_k+\frac{r_k^2}{x_k})\geq\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(2r_k+2r_k)=4\sum_{k=1}^{n}\alpha_k r_k .$$

Cazuri particulare

1. Fie numerele reale strict pozitive $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$, $r_1,r_2,...r_n$ și $a_1>r_1,a_2>r_2,...,a_n>r_n$. Arătați că

$$\alpha_1\frac{a_1}{a_1-r_1}+\alpha_2\frac{a_2}{a_2-r_2}+...+\alpha_n\frac{a_n}{a_n-r_n}\geq 4\left(\frac{\alpha_1 r_1}{a_1}+\frac{\alpha_2 r_2}{a_2}+...+\frac{\alpha_n r_n}{a_n}\right).$$

2. Fie numerele reale strict pozitive $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, r_1,r_2,r_3 și $a_1>r_1,a_2>r_2,a_3>r_3$ .Arătați că

$$\frac{\alpha_1}{a_1-r_1}+\frac{\alpha_2}{a_2-r_2}+\frac{\alpha_3}{a_3-r_3}\geq 4\left(\frac{\alpha_1 r_1}{a_1^2}+\frac{\alpha_2 r_2}{a_2^2}+\frac{\alpha_3 r_3}{a_3^2}\right).$$

3. Fie numerele reale strict pozitive $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, r_1,r_2,r_3 și $a_1>r_1,a_2>r_2,a_3>r_3$ .Arătați că

$$\frac{\alpha_1}{a_1(a_1-r_1)}+\frac{\alpha_2}{a_2(a_2-r_2)}+\frac{\alpha_3}{a_3(a_3-r_3)}\geq 4\left(\frac{\alpha_1 r_1}{a_1^3}+\frac{\alpha_2 r_2}{a_2^3}+\frac{\alpha_3 r_3}{a_3^3}\right).$$

3. Să se demonstreze că dacă $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$, iar $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}$, atunci $|z|=1$.

Generalizare:

Fie numerele reale nenule *a, b, c, d* astfel încât $ad\neq bc$ și $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ astfel încât $c+dz+cz^2\neq 0$ .Arătați că dacă $\frac{a+bz+az^2}{c+dz+cz^2}\in\mathbb{R}$, atunci $|z|=1$ și reciproc.

Soluție:

$$\frac{a+bz+az^2}{c+dz+cz^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{a+bz+az^2}{c+dz+cz^2}=\frac{a+b\bar{z}+a\overline{z^2}}{c+d\bar{z}+c\overline{z^2}}\Leftrightarrow$$

$$ac+ad\bar{z}+ac\overline{z^2}+bcz+bd|z|^2+$$

$$+bcz\overline{z^2}+acz^2+ad\bar{z}z^2+acz^2\overline{z^2}=ac+adz+acz^2+bc\bar{z}+bd|z|^2+bc\bar{z}z^2+$$

$$+ac\overline{z^2}+adz\overline{z^2}+acz^2\overline{z^2}\Leftrightarrow ad(\bar{z}-z)+bc(z-\bar{z})+bc|z|^2(\bar{z}-z)+ad|z|^2(z-\bar{z})=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\bar{z}-z)\left[ad-bc+bc|z|^2-ad|z|^2\right]=0\Leftrightarrow ad-bc=(ad-bc)|z|^2\Leftrightarrow|z|=1$$

Observația 2: Dacă considerăm numerele reale nenule a,b,c,d și $k>0$ astfel încât $ad\neq bc, z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}, ck^2+dkz+cz^2\neq 0$, atunci $\frac{ak^2+bkz+az^2}{ck^2+dkz+cz^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow|z|=k$.

Cazuri particulare

1. Fie $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ astfel încât $1-z+z^2\neq 0$ .Arătați că dacă $\frac{1+3z+z^2}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}$, atunci $|z|=1$ și reciproc.

2. Fie $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ astfel încât $1-z+z^2\neq 0$ .Arătați că dacă $\frac{1+2z+z^2}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}$, atunci $|z|=1$ și reciproc.

3. Fie $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ astfel încât $1+z+z^2\neq 0$ .Arătați că dacă $\frac{1+3z+z^2}{1+z+z^2}\in\mathbb{R}$, atunci $|z|=1$ şi reciproc.

4. Fie $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}, k\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $k^2-kz+z^2\neq 0$, arătați că

$$\frac{k^2+kz+z^2}{k^2-kz+z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow|z|=k.$$

5. Fie $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}, k\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $k^2-kz+z^2\neq 0$, arătați că

$$\frac{k^2+2kz+z^2}{k^2-kz+z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow|z|=k.$$

4. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale ce satisface relația $\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{a_n}{2}\right)=0$. Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

Generalizarea 1:

Fie şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale ce satisfac relațiile:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-b_na_n}{1-b_n}=L\in\overline{\mathbb{R}}$ **;** **b)** $b_n\in(0,1),(\forall)n\in\mathbb{N}$ **;**

c) $\lim_{n\to\infty}b_1b_1...b_n=0$ **.**

Atunci $\lim_{n\to\infty}a_n=L$

Soluție:

Deoarece $L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-b_na_n}{1-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_{n+1}}{b_1b_2...b_n}-\frac{a_n}{b_1b_2...b_{n-1}}}{\frac{1}{b_1b_2...b_n}-\frac{1}{b_1b_2...b_{n-1}}}$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_1b_2...b_n}=\infty$ folosind teorema lui Cesaro-Stolz deducem că $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{b_1b_2...b_{n-1}}}{\frac{1}{b_1b_2...b_{n-1}}}=L$

Observația 3: În cazul în care $b_n=\lambda\in(0,1),(\forall)n\geq 1\Rightarrow$ $a_{n+1}-\lambda a_n\to L(1-\lambda)\in\overline{\mathbb{R}}\Rightarrow a_n\to L$.

Obesrvația 4: Dacă $\lambda\in(-1,0),(\forall)n\geq 1$ şi $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-\lambda a_n)=L(1-\lambda)\in\mathbb{R}$, atunci $\lim_{n\to\infty}a_n=L.$

Soluție :

Dacă notăm $-\lambda=\nu\in(0,1)$, atunci din $a_{n+1}-\lambda a_n\to L(1-\lambda)$ deducem că $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+\nu a_n)=L(1+\nu)$. Dacă mai notăm $a_{n+1}+\nu a_n=x_n$, atunci

$$y_n=x_{n+1}-\nu x_n=a_{n+2}+\nu a_{n+1}-\nu(a_{n+1}+\nu a_n)=a_{n+2}-\nu^2a_n\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=L(1+\nu)-\nu L(1+\nu)=L(1-\nu^2)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=L\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=L.$$

Generalizarea 2: Fie şirurile de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $\lambda,\nu\in(-1,1)$ astfel încât $\lambda\nu\geq 0$ $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-\lambda b_n)=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-\nu a_n)=0$. Arataţi că $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

Soluție

Daca $\lambda=0$ sau $\nu=0$ concluzia este evidentă. Daca $\lambda\nu>0$, atunci fie $\alpha=\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}$ si cum

$$\left(a_{n+1}-\lambda b_n\right)+\alpha\left(b_{n+1}-\nu a_n\right)\to 0\Rightarrow\left(a_{n+1}+\alpha b_{n+1}\right)-\alpha\nu\left(a_n+\frac{\lambda}{\alpha\nu}b_n\right)\to 0$$

$$\Rightarrow\left(a_{n+1}+\alpha b_{n+1}\right)-k\sqrt{\lambda\nu}\left(a_n+\alpha b_n\right)\to 0\Rightarrow a_n+\alpha b_n\to 0 \text{ unde } k=\operatorname{sign}\nu \qquad \textbf{(1)}$$

Analog, $\left(a_{n+1}-\lambda b_n\right)-\alpha\left(b_{n+1}-\nu a_n\right)\to 0\Rightarrow a_{n+1}-\alpha b_{n+1}+\alpha\nu\left(a_n-\frac{\lambda}{\alpha\nu}b_n\right)\to 0$

$$\Rightarrow a_{n+1}-\alpha b_{n+1}+k\sqrt{\lambda\nu}\left(a_n-\alpha b_n\right)\to 0\Rightarrow a_n-\alpha b_n\to 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Din (1) și (2) obținem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

Cazuri particulare

1. Fie şirurile de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_{n+1}-\frac{1}{3}a_n\right)=0$. Arataţi că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

2. Fie şirurile de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}+\frac{1}{2}b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_{n+1}+\frac{1}{3}a_n\right)=0$. Arataţi că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

3. Fie şirurile de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)=0$. Arataţi că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

4. Fie şirurile de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}+\frac{1}{2}b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\right)=0$. Arataţi că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

5. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1\frac{arctg\,\frac{x+2}{x+6}}{arctg\,\frac{16+x-x^2}{18}}dx$.

Generalizare:

Fie $0\le a<b$ şi $0<\alpha<\beta$. Calculați $\displaystyle\int_a^b\frac{arctg\,\frac{x+\alpha}{x+\beta}}{arctg\,\frac{(\alpha+\beta)(a+b)+2\alpha\beta+2(a+b)x-2x^2}{(\beta-\alpha)(a+b+\alpha+\beta)}}dx$.

Soluție:

Fie I integrala de calculat. Folosind formula $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$,

$\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă,obținem: $I=\displaystyle\int_a^b\frac{arctg\,\frac{a+b+\alpha-x}{a+b+\beta-x}}{arctg\,\frac{(\alpha+\beta)(a+b)+2\alpha\beta+2(a+b)x-2x^2}{(\beta-\alpha)(a+b+\alpha+\beta)}}dx\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2I=\int_a^b \frac{arctg\frac{x+\alpha}{x+\beta}+arctg\frac{a+b+\alpha-x}{a+b+\beta-x}}{arctg\frac{(\alpha+\beta)(a+b)+2\alpha\beta+2(a+b)x-2x^2}{(\beta-\alpha)(a+b+\alpha+\beta)}}dx$$ .Este cunoscută formula:

$arctgx+arctgy=arctg\frac{x+y}{1-xy}$, cu $xy<1$. Deoarece $\frac{x+\alpha}{x+\beta}\cdot\frac{a+b+\alpha-x}{a+b+\beta-x}<1, \forall x\in[a,b]$ obținem

$$arctg\frac{x+\alpha}{x+\beta}+arctg\frac{a+b+\alpha-x}{a+b+\beta-x}=$$

$$arctg\frac{\frac{x+\alpha}{x+\beta}+\frac{a+b+\alpha-x}{a+b+\beta-x}}{1-\frac{x+\alpha}{x+\beta}\cdot\frac{a+b+\alpha-x}{a+b+\beta-x}}=arctg\frac{(\alpha+\beta)(a+b)+2\alpha\beta+2(a+b)x-2x^2}{(\beta-\alpha)(a+b+\alpha+\beta)},$$

de unde deducem că $2I=b-a\Rightarrow I=\frac{b-a}{2}$.

1. Să se calculeze $\int_a^b \frac{arctg\frac{x+1}{x+2}}{arctg\frac{3(a+b)+4+2(a+b)x-2x^2}{a+b+3}}dx$, $a<b$.

2. Să se calculeze $\int_0^2 \frac{arctg\frac{x+1}{x+2}}{arctg\frac{10+4x-2x^2}{5}}dx$.

3. Să se calculeze $\int_a^b \frac{arctg\frac{x+1}{x+3}}{arctg\frac{4(a+b)+6+2(a+b)x-2x^2}{2(a+b+4)}}dx$, $a<b$.

4. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{arctg\frac{x+1}{x+3}}{arctg\frac{5+x-x^2}{5}}dx$.

Bibliografie:

Revistele „Delta”, nr. 1,2/2006.