CREAȚII MATEMATICE SERIA B
ARTICOLE ȘI STUDII ȘTIINȚIFICE

ISSN online 2246-9451

Generalizări ale două inegalități

Daniela Macovei și Ion Bursuc

Motto: Răspuns-a Iisus și i-a zis: Adevărat, adevărat zic ție: De nu se va naște cineva de sus, nu va putea să vadă împărăția lui Dumnezeu. (Ioan,cap.3,v.3)

În $[1]$ sunt propuse următoarele inegalități

Problemă

a) Arătați că pentru orice $x>0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \le \frac{3}{8}x+\frac{1}{8}$$

b) Arătați că pentru orice $a,b,c,d>0$ cu $a+b+c+d=4$ are loc inegalitatea: $\frac{a}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{d}{\sqrt{d^2+3}} \le 2$.

În cele ce urmează vom generaliza aceste inegalități și vom prezenta unele cazuri particulare remarcabile

Generalizare

Fie $\alpha,\beta,p,q>0$ astfel încât $p=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)^3}$ și $q=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)^3}$.

Se cere:

a) Arătați că $\frac{x}{\sqrt{px^2+q}} \le \alpha x+\beta, (\forall) x>0$

b) Arătați că pentru orice $a,b,c,d>0$ cu $a+b+c+d=4$ are loc inegalitatea: $\frac{a}{\sqrt{pa^2+q}}+\frac{b}{\sqrt{pb^2+q}}+\frac{c}{\sqrt{pc^2+q}}+\frac{d}{\sqrt{pd^2+q}} \le 4\alpha+4\beta$.

Soluție

a) Ridicând ambii membri ai inegalității din enunț la pătrat obținem:

$$\frac{x^2}{x^2+3} \le \frac{(3x+1)^2}{64} \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x^2} \ge \frac{64}{(3x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{3}{x^2}+1 \ge \frac{64}{(3x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{3}{x^2}-3 \ge$$

$$\frac{64}{(3x+1)^2}-4 \Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x+1)}{x^2} \le \frac{4(3x-3)(3x+5)}{(3x+1)^2} \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{4(3x+5)}{(3x+1)^2}-\frac{x+1}{x^2}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\frac{4(3x+1)x^2+16x^2-x(3x+1)^2-(3x+1)^2}{(3x+1)^2 x^2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)\frac{x(3x+1)(4x-3x-1)+(x-1)(7x+1)}{(3x+1)^2 x^2} \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \frac{3x^2+8x+1}{(3x+1)^2 x^2} \ge 0$$

b)Se obține prin sumarea inegalităților de la punctual a).

Soluție(generalizare)

a)

Inegalitatea se scrie astfel:

$$\frac{x^2}{px^2+q} \le (\alpha x+\beta)^2 \ \Leftrightarrow \frac{px^2+q}{x^2} \ge \frac{1}{(\alpha x+\beta)^2} \Leftrightarrow \frac{q}{x^2}+p \ge \frac{1}{(\alpha x+\beta)^2} \Leftrightarrow \frac{q}{x^2}-q \ge$$

$$\frac{1}{(\alpha x+\beta)^2}-\frac{1}{(\alpha+\beta)^2} \ \Leftrightarrow \ \frac{q(x-1)(x+1)}{x^2} \ \le \ \frac{\alpha(x-1)(\alpha x+\alpha+2\beta)}{(\alpha x+\beta)^2(\alpha+\beta)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x-1)\left(\frac{\alpha x+\alpha+2\beta}{(\alpha x+\beta)^2}-\frac{x+1}{(\alpha+\beta)x^2}\right) \ge 0 \ \Leftrightarrow$$

$$(x-1)\frac{(\alpha+\beta)(\alpha x+\beta)x^2+(\alpha+\beta)^2 x^2-x(\alpha x+\beta)^2-(\alpha x+\beta)^2}{(\alpha+\beta)(\alpha x+\beta)^2 x^2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)\frac{x(\alpha x+\beta)(\alpha x+\beta x-\alpha x-\beta)+(\alpha x+\beta x-\alpha x-\beta)(2\alpha x+\beta x+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha x+\beta)^2 x^2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 \frac{\beta x(\alpha x+\beta)+\beta(2\alpha x+\beta x+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha x+\beta)^2 x^2} \ge 0 .$$

b)Se obține prin sumarea inegalităților de la punctual a)

Observație

Fie $\alpha,\beta,p,q>0$ astfel încât $p=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)^3}$ și $q=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)^3}$.

Arătați că pentru orice $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n>0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a_1b_1}{\sqrt{pa_1^{\,2}+q}}+\frac{a_2b_2}{\sqrt{pa_2^{\,2}+q}}+...+\frac{a_nb_n}{\sqrt{pa_n^{\,2}+q}} \le \ (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)\alpha+\beta(b_1+b_2+...+b_n).$$

Cazuri particulare

1. a)Arătați că pentru orice $x>0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} \le \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$$

b) Arătați că pentru orice $a,b,c,d>0$ cu $a+b+c+d=4$ are loc inegalitatea: $\frac{a}{\sqrt{3a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{3b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{3c^2+1}}+\frac{d}{\sqrt{3d^2+1}} \le 2$.

2. a)Arătați că pentru orice $x>0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{x}{\sqrt{15x^2+1}} \le \frac{1}{64}x + \frac{15}{64}$$

b) Arătați că pentru orice $a,b,c,d>0$ cu $a+b+c+d=4$ are loc

inegalitatea: $\frac{a}{\sqrt{15a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{15b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{15c^2+1}}+\frac{d}{\sqrt{15d^2+1}} \le 1$.

3. a)Arătați că pentru orice $x>0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{x}{\sqrt{31x^2+5}} \le \frac{5}{216}x + \frac{31}{216}$$

b) Arătați că pentru orice $a,b,c,d,e,f>0$ cu $a+b+c+d+e+f=6$ are loc inegalitatea**:**

$$\frac{a}{\sqrt{31a^2+5}}+\frac{b}{\sqrt{31b^2+5}}+\frac{c}{\sqrt{31c^2+5}}+\frac{d}{\sqrt{31d^2+5}}+\frac{e}{\sqrt{31e^2+5}}+\frac{f}{\sqrt{31f^2+5}} \le 1.$$

Bibliografie

[1] :http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=263&t=513612

Profesori,Colegiul Național de Informatică „Spiru Haret”
Str. Zorilor nr. 17, Suceava