CREAȚII MATEMATICE SERIA B
ARTICOLE ȘI STUDII ȘTIINȚIFICE

ISSN online 2246-9451

Generalizări ale unor probleme date la concursul internațional “Spiru Haret”,Suceava,2008

de Ion Bursuc

Motto: Și le-a zis Iisus: Adevărat, adevărat zic vouă, dacă nu veți mânca trupul Fiului Omului și nu veți bea sângele Lui, nu veți avea viață în voi.(Ioan,cap.6,v. 53)

În cele ce urmează voi generaliza câteva dintre cele mai frumoase probleme date la CONCURSUL INTERNAȚIONAL “SPIRU HARET”,SUCEAVA,2008.

Problema 1

a).Arătați că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ pentru orice $a,b>0$.Egalitate are loc dacă și numai dacă $a=b$.

b).Determinați $x,y\in(0,\infty)$ știind că are loc egalitatea:

$$\frac{2x+y}{x+2y}+\frac{3x+2y^2}{2x+3y^2}+\frac{x+2y}{2x+y}+\frac{2x+3y^2}{3x+2y^2}=4.$$

Ion Bursuc, profesor, Suceava

Generalizarea 1

Fie $a,b,c,d\in(0,\infty)$ cu $a\neq b, c\neq d$ și funcțiile $f,g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ astfel încât ecuația $f(x)=g(x)$ are ca mulțime de soluții pe $A\subset(0,\infty)$.Determinați $x,y\in(0,\infty)$ știind că: $\frac{ax+by}{bx+ay}+\frac{cf(x)+dg(y)}{df(x)+cg(y)}+\frac{bx+ay}{ax+by}+\frac{df(x)+cg(y)}{cf(x)+dg(y)}=4$.

Soluție:

Folosind inegalitatea $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\geq 2,(\forall)u,v>0$ cu egalitate $\Leftrightarrow u=v$ obținem:

$$4=\left(\frac{ax+by}{bx+ay}+\frac{bx+ay}{ax+by}\right)+\left(\frac{cf(x)+dg(y)}{df(x)+cg(y)}+\frac{df(x)+cg(y)}{cf(x)+dg(y)}\right)\geq 2+2=4,$$

de unde $ax+by=bx+ay$ (1)

și $cf(x)+dg(y)=df(x)+cg(y)$ (2)

Din (1) obținem $x=y$ și deci relația (2) devine $cf(x)+dg(x)=df(x)+cg(x)\Leftrightarrow$ $(c-d)f(x)=(c-d)g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\Leftrightarrow x\in A.$

Prin urmare $x=y\in A$. Se observă că dacă $x=y\in A$ atunci este satisfăcută relația din enunț.

Generalizarea 2.

Fie $a,b,c,d,\alpha,\beta\in(0,\infty)$ cu $a\neq b,\ c\neq d$ și funcțiile $f,g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ astfel încât ecuația $f(x)=g(x)$ are ca mulțime de soluții pe $A\subset(0,\infty)$.

Determinați $x, y \in (0,\infty)$ ştiind că :

$$\alpha\frac{ax+by}{bx+ay}+\beta\frac{cf(x)+dg(y)}{df(x)+cg(y)}+\alpha\frac{bx+ay}{ax+by}+\beta\frac{df(x)+cg(y)}{cf(x)+dg(y)}=2(\alpha+\beta).$$

Generalizarea 3.

Fie $a,b,c,d \in (0,\infty)$ cu $a \neq b,\ c \neq d$ şi funcțiile $f,g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ astfel încât ecuația $f(x)=g(x)$ are ca mulțime de soluții pe $A\subset(0,\infty)$.

Dacă $\alpha,\beta:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ sunt două funcții, atunci determinați $x,y\in(0,\infty)$ astfel încât:

$$\alpha(x,y)\frac{ax+by}{bx+ay}+\beta(x,y)\frac{cf(x)+dg(y)}{df(x)+cg(y)}++\alpha(x,y)\frac{bx+ay}{ax+by}+\beta(x,y)\frac{df(x)+cf(y)}{cf(x)+dg(y)}=$$
$$2\alpha(x,y)+2\beta(x,y).$$

Demonstrațiile la generalizarea 2 şi generalizarea 3 sunt asemănătoare cu cea dată la generalizarea 1 obținând $x=y\in A$.

Cazuri particulare:

Determinați $x,y\in(0,\infty)$ în următoarele situații:

a). $\frac{2x+y}{x+2y}+\frac{3x+2y^3}{2x+3y^3}+\frac{x+2y}{2x+y}+\frac{2x+3y^2}{3x+2y^3}=4.$

b). $\frac{ax+by}{bx+ay}+\frac{ax^n+by^m}{bx^n+ay^m}+\frac{bx+ay}{ax+by}+\frac{bx^n+ay^m}{ax^n+by^m}=4$,unde $a,b>0,\ a\neq b$ şi $n,m\in\mathbb{R}$ cu $n\neq m.$

c). $\frac{ax+by}{bx+ay}+\frac{axy+b}{bxy+a}+\frac{bx+ay}{ax+by}+\frac{bxy+a}{axy+b}=4$,unde $a,b>0,\ a\neq b.$

d). $\frac{ax+by}{bx+ay}+\frac{a\left(x^2+\alpha\beta\right)+b(\alpha+\beta)y}{b(x^2+\alpha\beta)+a(\alpha+\beta)y}+\frac{bx+ay}{ax+by}+$

$+\frac{b(x^2+\alpha\beta)+a(\alpha+\beta)y}{a(x^2+\alpha\beta)+b(\alpha+\beta)y}=4,$ unde $a,b,\alpha,\beta>0$ cu $a\neq b$ şi $\alpha\neq\beta.$

e). $\frac{2x+y}{x+2y}+\frac{3x^2+10y+18}{2x^2+15y+12}+\frac{x+2y}{2x+y}+\frac{2x^2+15y+12}{3x^2+10y+18}=4.$

f). $\frac{3x+2y}{2x+3y}+\frac{3^x+4^x+2\cdot5^y}{2\left(3^x+4^x\right)+5^y}+\frac{2x+3y}{3x+2y}+\frac{2\left(3^x+4^x\right)+5^y}{3^x+4^x+2\cdot5^y}=4$

g). $\frac{2x+y}{x+2y}+\frac{3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{y}}+\frac{x+2y}{2x+y}+\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{y}}{3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{y}}=4.$

h). $3\frac{2x+y}{x+2y}+2\frac{3x+y^2}{x+3y^2}+3\frac{x+2y}{2x+y}+2\frac{x+3y^2}{3x+y^2}=10.$

Problema 2

a).Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ satisface relația:

$|f(x)+y|+|f(x)-y|=|x+y|+|x-y|,$ (*) pentru orice numere reale x şi y.

b).Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ce satisfac relația (*).

Ion Bursuc, profesor, Suceava

Generalizarea 1.
Fie funcțiile $h:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu h injectivă.
a).Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|g(x)|$ satisface relația :

$$h(|f(x)+y|)+h(|f(x)-y|)=h(|g(x)+y|)+h(|g(x)-y|),\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}. \qquad (3)$$

b).Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ce satisfac relația (3).
Soluție:
a).Fie $A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,g(x)\geq 0\}$. Dacă $x\in A,$ atunci $f(x)=g(x)$ și deci

$$h(|f(x)+y|)+h(|f(x)-y|)=h(|g(x)+y|)+h(|g(x)-y|),(\forall)\ y\in\mathbb{R}.$$

Dacă $x\in\mathbb{R}-A\Rightarrow f(x)=-g(x)$ și avem:

$$h(|f(x)+y|)+h(|f(x)-y|)=h(|-g(x)+y|)+$$
$$h(|-g(x)-y|)=h(|g(x)+y|)+h(|g(x)-y|),\ (\forall)\ y\in\mathbb{R}.$$

b).Pentru $y=0$ obținem $2h(|f(x)|)=2h(|g(x)|)$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ și cum h este injectivă deducem că $|f(x)|=|g(x)|,(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow(\exists)B\subset\mathbb{R}$ astfel încât:

$$f(x)=\begin{cases}g(x)\ ,\text{dacă } x\in B\\ -g(x),\text{dacă } x\notin B\end{cases}.$$

Se observă că funcția găsită satisface relația (3).

Generalizarea 2.
Fie funcțiile $h:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu h injectivă și

$$s:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ s(x)=\begin{cases}1\ \ ,\text{ dacă } x\geq 0\\ -1,\text{ dacă } x<0.\end{cases}$$

a).Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|g(x)|$ satisface relația :

$$ah(|f(x)+y|)+bh(|f(x)-y|)=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}s(g(x))\right)h(|g(x)+y|)+$$
$$+\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}s(g(x))\right)h(|g(x)-y|),(\forall)x,y\in\mathbb{R}, \qquad (4)$$

unde $a,b\in(0,\infty)$.
b).Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ce satisfac relația (4).
Generalizarea 3.
Fie funcțiile $h:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu h injectivă și

$s:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ s(x)=\begin{cases}1,\text{dacă } x\geq 0\\ -1,\text{dacă } x<0.\end{cases}$ .Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ cu $a+b\neq 0,c\neq 0,d\neq 0.$

a). Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|g(x)|$ satisface relația:

$$ah(|f(x)+cy|)+bh(|f(x)-dy|)=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}s(g(x))\right)\cdot$$
$$h\left(\left|g(x)+y\left(\frac{c+d}{2}+\frac{c-d}{2}s(g(x))\right)\right|\right)+\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}s(g(x))\right)\cdot$$
$$\cdot h\left(\left|g(x)-y\left(\frac{c+d}{2}+\frac{d-c}{2}s(g(x))\right)\right|\right)(\forall)x,y\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$

b). Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ce satisfac relația (5)

Cazuri particulare :

1.a).Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|^3$ satisface relația:

$$|f(x)+y|^3+|f(x)-y|^3=|x^3+y|^3+|x^3-y|^3,\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}. \qquad (6)$$

b).Determinați toate funcțiile ce satisfac relația (6).

2.a).Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ satisface relația:

$$\frac{|f(x)+y|}{a+|f(x)+y|}+\frac{|f(x)-y|}{a+|f(x)-y|}=\frac{|x+y|}{a+|x+y|}+\frac{|x-y|}{a+|x+y|},\ (\forall)x,y\in\mathbb{R},\text{ unde } a>0.$$

b).Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ce satisfac relația de mai sus.

3.Fie funcția $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ s(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\geq 0\\ -1, \text{dacă } x<0\end{cases}$

a). Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ satisface

relația: $3|f(x)+y|+|f(x)-y|=(2+s(x))|x+y|+(2-s(x))|x-y|,\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}$

b). Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ce satisfac relația de mai sus.

4.Fie funcția $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, s(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\geq 0\\ -1, \text{dacă } x<0.\end{cases}$

a).Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ satisface relația:

$$|f(x)+3y|+|f(x)-y|=|x+y(2+s(x))|+|x-y(2-s(x))|,(\forall)\ x,y\in\mathbb{R}.$$

b).Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ce satisfac relația de mai sus .

Problema 3

a).Arătați că $1+xy\geq x+y$ pentru orice $x,y\in[1,\infty)$.

b).Arătați că pentru orice $x,y,z\in[1,\infty)$, avem:

$$\log_{x+y}(1+yz)+\log_{y+z}(1+zx)+\log_{z+x}(1+xy)\geq 3.$$

Ion Bursuc şi Daniela Macovei, profesori, Suceava

Generalizarea 1.

Fie $a\geq 1$.Se cere:

a).Arătați că $xy+a^2\geq a(x+y),\ (\forall)x,y\in[a,\infty)$.

b).Arătați că pentru orice $x,y,z\in[a,\infty)$ şi $\alpha,\beta,\gamma,k\in(0,\infty)$ avem :

$$\alpha\log_{x+y}^k\left(\frac{yz}{a}+a\right)+\beta\log_{y+z}^k\left(\frac{zx}{a}+a\right)+\gamma\log_{z+x}^k\left(\frac{xy}{a}+a\right)\geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}.$$

Soluție:

a).Inegalitatea $xy+a^2\geq a(x+y)$ se scrie $(x-a)(y-a)\geq 0,$ care este adevarată deoarece $x-a,\ y-a\geq 0.$

b).Deoarece $x+y,\ \frac{yz}{a}+a>1$ si $\frac{yz}{a}+a\geq y+z$ obținem:

$\log_{x+y}\left(\frac{yz}{a}+a\right)\geq\log_{x+y}(y+z)>0.$ Analog $\log_{y+z}\left(\frac{zx}{a}+a\right)\geq\log_{y+z}(z+x)>0,$

$\log_{z+x}\left(\frac{xy}{a}+a\right)\geq\log_{z+x}(x+y)>0.$ Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$\alpha\log_{x+y}^{k}\left(\frac{yz}{a}+a\right)+\beta\log_{y+z}^{k}\left(\frac{zx}{a}+a\right)+\gamma\log_{z+x}^{k}\left(\frac{xy}{a}+a\right)\geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma\left(\log_{x+y}(y+z)\log_{y+z}(z+x)\log_{z+x}(x+y)\right)^{k}}=3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}.$$

Generalizarea 2

Fie $a\geq 1$.

a).Arătați că $\alpha yz+\beta xz+\gamma xy+a^{2}(\alpha+\beta+\gamma)\geq ax(\beta+\gamma)+$
$+ay(\alpha+\gamma)+az(\alpha+\beta),(\forall)x,y,z\in[a,\infty)$ și $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$.

b).Arătați că pentru orice $x,y,z\in[a,\infty)$ și $\alpha,\beta,\gamma\in[0,\infty)$ cu cel puțin unul dintre numerele α,β,γ mai mare decât 0,5 avem:

$$A\log_{E(z,x,y)}^{k}F(x,y,z)+B\log_{E(x,y,z)}^{k}F(y,z,x)+C\log_{E(y,z,x)}^{k}F(z,x,y)\geq 3\sqrt[3]{ABC},$$

$(\forall)A,B,C>0$,unde $E(x,y,z)=x(\beta+\gamma)+y(\alpha+\gamma)+z(\alpha+\beta)$ și

$$F(x,y,z)=\frac{\alpha yz+\beta zx+\gamma xy}{a}+a(\alpha+\beta+\gamma).$$

Soluție:

a).Inegalitatea se scrie astfel:

$\alpha(y-a)(z-a)+\beta(z-a)(x-a)+\gamma(x-a)(y-a)\geq 0\ (\forall)x,y,z\in[a,\infty)$ si $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$

ceea ce este evident adevarată.

b).Deoarece $E(x,y,z)>1,\ F(x,y,z)>1$ și $F(x,y,z)\geq E(x,y,z)\Rightarrow$

$\Rightarrow\log_{E(z,x,y)}F(x,y,z)\geq\log_{E(z,x,y)}E(x,y,z)>0$

Analog $\log_{E(x,y,z)}F(y,z,x)\geq\log_{E(x,y,z)}E(y,z,x)>0$ și

$\log_{E(y,z,x)}F(z,x,y)\geq\log_{E(y,z,x)}E(z,x,y)>0$.În continuare se aplică inegalitatea mediilor.

Cazuri particulare şi alte probleme asemănătoare:

1.Arătați că pentru orice $x,y,z\in[1,\infty)$ avem:

$$\frac{x}{y}\log_{x+y}(1+yz)+\frac{y}{z}\log_{y+z}(1+zx)+\frac{z}{x}\log_{z+x}(1+xy)\geq 3.$$

2.Arătați că pentru orice $x,y,z\in(1,\infty)$ avem:

$$\log_{y}x\cdot\log_{x+y}(1+yz)+\log_{z}y\cdot\log_{y+z}(1+zx)+\log_{x}z\cdot\log_{z+x}(1+xy)\geq 3.$$

3.Arătați că pentru orice $x,y,z\geq a\geq 1$ avem:

$$\log_{x+y}^{2}\left(\frac{xy}{a}+a\right)+\log_{y+z}^{2}\left(\frac{zx}{a}+a\right)+\log_{z+y}^{2}\left(\frac{xy}{a}+a\right)\geq 3.$$

4. Arătați că dacă $\alpha,\beta,\gamma>0$ și

$\alpha\log_{x+y}(1+yz)+\beta\log_{y+z}(1+zx)+\gamma\log_{z+x}(1+xy)\geq\alpha+\beta+\gamma,\ (\forall)x,y,z\geq 1,$ atunci $\alpha=\beta=\gamma.$

5.Arătați că dacă $\alpha,\beta,\gamma>0,a\geq 1$ și $\alpha\log_{x+y}\left(\frac{yz}{a}+a\right)+\beta\log_{y+z}\left(\frac{zx}{a}+a\right)+$
$+\gamma\log_{z+x}\left(\frac{xy}{a}+a\right)\geq\alpha+\beta+\gamma,(\forall)x,y,z\geq a,$ atunci $\alpha=\beta=\gamma.$

Problema 4

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$[\log_{2007}x]+\left[\frac{1}{2007}+\log_{2007}x\right]=2007.$$

Adrian Sandovici, profesor dr., Piatra Neamț

Generalizare

Fie $\alpha,\beta,n,m,r\in\mathbb{N}^{*}$ $m,n\geq 2.$ Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\alpha[\log_m x]+\beta\left[\frac{1}{n}+\log_m x\right]=(\alpha+\beta)r+\beta.$$

Soluție:

Fie $y=\log_m x$ și $[y]=k.$

Cazul I $\quad y\in\left[k,k+\frac{n-1}{n}\right).$

Avem : $y+\frac{1}{n}\in\left[k+\frac{1}{n},k+1\right)\Rightarrow\left[y+\frac{1}{n}\right]=k$

Ecuația devine : $\alpha k+\beta k=(\alpha+\beta)r+\beta\Leftrightarrow k=r+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\notin\mathbb{Z}$ (fals).

Cazul II $\quad y\in\left[k+\frac{n-1}{n},\,k+1\right)\Leftrightarrow y+\frac{1}{n}\in\left[k+1,k+1+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[y+\frac{1}{n}\right]=k+1.$ Ecuația devine: $\alpha k+\beta k+\beta=(\alpha+\beta)r+\beta\Rightarrow k=r\Rightarrow$

$\Rightarrow\log_m x\in\left[r+\frac{n-1}{n},r+1\right)\Rightarrow x\in\left[m^{r+\frac{n-1}{n}},m^{r+1}\right).$

Cazuri particulare:

1.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$[\log_{2009}x]+\left[\frac{1}{n}+\log_{2009}x\right]=2009, n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

2.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$2[\log_{2009}x]+3\left[\frac{1}{2009}+\log_{2009}x\right]=2008.$$

3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$[\log_{2009}x]+6\left[\frac{1}{2008}+\log_{2009}x\right]=2008.$$

4.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$8[\log_{2009}x]+\left[\frac{1}{2008}+\log_{2009}x\right]=2008.$$

Problema 5

Fie $g:D\to\mathbb{R},D\subset\mathbb{R},0\notin D$,astfel încât: $g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(x),(\forall)x\in D$ și $g(1)=0.$ Să se determine funcțiile $f:D\to\mathbb{R},$ astfel încât $f(xy)\geq f(x)+f(y)\geq g(xy)$ pentru orice $x,y\in D$.

Călin Oanea,profesor,Suceava

Generalizare

Fie $g:D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}, 0\notin D, 1\in D, \frac{1}{x}, xy\in D, (\forall)x,y\in D$ astfel încât

$g\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{a}{b}g(x), (\forall)x\in D$,unde $a,b>0$ cu $a+b>1$. Să se determine

funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$,astfel încât: $f(xy)\ \geq\ af(x)+bf(y)\ \geq\ g(xy)\ ,(\forall)x,y\in D$.

Soluție:

Înlocuind în relația (1) $g\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{a}{b}g(x), (\forall)x\in D$, $x=1$ obținem $g(1)=0$.

În relația (2) $f(xy)\geq af(x)+bf(y)\geq g(xy),\ (\forall)x,y\in D$,înlocuind $x=y=1\Rightarrow$ $f(1)\geq(a+b)f(1)\geq g(1)\Rightarrow f(1)=0$. Înlocuind în (2) y cu $\frac{1}{x}\Rightarrow f(1)\geq af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)\geq g(1)\ ,(\forall)x\in D\ \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{a}{b}f(x),\ (\forall)x\in D$ (3).

Dacă înlocuim în (2) x cu $\frac{1}{x}$ şi y cu $\frac{1}{y}$ folosind relațiile (1) şi (3) obținem:

$$f\left(\frac{1}{xy}\right)\geq af\left(\frac{1}{x}\right)+bf\left(\frac{1}{y}\right)\geq g\left(\frac{1}{xy}\right), (\forall)x,y\in D$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{b}f(xy)\geq -\frac{a^2}{b}f(x)-af(y)\geq -\frac{a}{b}g(xy), (\forall)x,y\in D$$

$\Rightarrow f(xy)\leq af(x)+bf(y)\leq g(xy), (\forall)x,y\in D$ şi folosind (2) $\Rightarrow f(xy)=g(xy), (\forall)x,y\in D\Rightarrow f=g$.

Cazuri particulare:

1. Fie $g:D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}, 0\notin D, 1\in D, \frac{1}{x}, xy\in D, (\forall)x,y\in D$ astfel încât $g\left(\frac{1}{x}\right)=-2g(x), (\forall)x\in D$ .Să se determine funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$,astfel încât: $f(xy)\ \geq\ 2f(x)+f(y)\ \geq\ g(xy)\ ,(\forall)x,y\in D$.

2. Fie $g:D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}, 0\notin D, 1\in D, \frac{1}{x}, xy\in D, (\forall)x,y\in D$ astfel încât $g\left(\frac{1}{x}\right)=-ag(x), (\forall)x\in D$,unde $a>0$ .Să se determine funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$,astfel încât: $f(xy)\ \geq\ af(x)+f(y)\ \geq\ g(xy)\ ,(\forall)x,y\in D$.

3. Fie $g:D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}, 0\notin D, 1\in D, \frac{1}{x}, xy\in D, (\forall)x,y\in D$ astfel încât $g\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{3}g(x), (\forall)x\in D$ .Să se determine funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$,astfel încât: $f(xy)\ \geq\ 2f(x)+3f(y)\ \geq\ g(xy)\ ,(\forall)x,y\in D$.

Problema 6

Să se calculeze limita:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2^x+3^x+...+2008^x-2007)x^{2007}}{(2^x+3^x+...+2009^x-2008)(\sin x)^{2007}}.$$

Radu Bairac,prof.dr.,Chişinău

Generalizare:

Fie funcțiile $f_i:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, i\in\{1,2,...,n\}$ derivabile în $x_0\in A$ şi $g_i:A\to\mathbb{R}, i\in\{1,2,...,m\}$ derivabile în $x_0\in A$. Dacă funcția $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 cu $f'(x_0)\neq 0$ si $\sum_{k=1}^{m} g'(x_0)\neq 0$, atunci calculați

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)-f_1(x_0)-f_2(x_0)-...-f_n(x_0)}{g_1(x)+g_2(x)+...+g_m(x)-g_1(x_0)-...-g_m(x_0)}\cdot\frac{(x-x_0)^p}{(f(x)-f(x_0))^p}$$,unde $p\in\mathbb{N}$.

Soluție:

Dacă notăm cu L limită dată,atunci avem:

$$L=\lim_{x\to x_0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(x)-f_k(x_0)}{x-x_0}}{\sum_{k=1}^{m}\frac{g_k(x)-g_k(x_0)}{x-x_0}}\cdot\left(\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\right)^p=$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to x_0}\frac{f_k(x)-f_k(x_0)}{x-x_0}}{\sum_{k=1}^{m}\lim_{x\to x_0}\frac{g_k(x)-g_k(x_0)}{x-x_0}}\cdot\frac{1}{\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^p}=\frac{\sum_{k=1}^{n}f_k'(x_0)}{\sum_{k=1}^{m}g_k'(x_0)\cdot(f'(x_0))^p}.$$

Cazuri particulare:

1.Calculați limita: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(ax+b)+\ln(bx+a)-\ln ab}{\ln(ax^2+b)+\ln(bx^2+a)-\ln ab}$, unde $a,b>0$.

2.Calculați limita: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax+b}+e^{bx+a}-e^a-e^b}{\frac{1}{ax+b}+\frac{1}{bx+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$, unde $a,b>0$.

3.Calculați limita: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax+b)+\sin(bx+a)-\sin a-\sin b}{\cos(ax+b)+\cos(bx+a)-\cos a-\cos b}$, unde $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

4.Calculați limita: $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{ax^n+b}+\frac{1}{bx^n+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{ax^m+b}+\frac{1}{bx^m+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$, unde $a,b>0$ și $n,m\in\mathbb{N}^*$.

5.Calculați limita: $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{af(x)+b}+\frac{1}{bf(x)+a}-\frac{1}{af(0)+b}-\frac{1}{bf(0)+a}}{\frac{1}{ax+b}+\frac{1}{bx+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ în funcție de $L=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$, unde $a,b>0$ și $f:(-\alpha,\alpha)\to(0,\infty),\alpha>0$.

6.Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{ax+b+c}+\sqrt[5]{bx+a+c}+\sqrt[5]{cx+a+b}-k}{x}$ cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ și $k=\sqrt[5]{a+b}+\sqrt[5]{b+c}+\sqrt[5]{c+a}$

7.Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{a^x+(a+b)^x+(a+b+c)^x-3}{b^x+(b+c)^x+(a+b+c)^x-3}$, unde $a,b,c>0$.

Problema 7

Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcție continuă astfel încât $f(x)\le x^2$,$(\forall)x\in[0,1]$.Se definește șirul $(x_n)_{n\ge 1}$ astfel: $x_1\in(0,1)$ și $x_{n+1}=f(x_n),(\forall)n\ge 1$. Să se studieze natura șirului $(x_n)_{n\ge 1}$.

Anca Andrei,prof.dr.,Suceava

Generalizarea 1:

a) Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi $f:[a,b]\to[a,b]$ o funcţie astfel încât $f(x)\le x$, $(\forall)x\in[a,b]$. Dacă definim şirul $(x_n)_{n\ge1}$ astfel: $x_1\in(a,b)$ şi $x_{n+1}=f(x_n),(\forall)n\ge1$, atunci şirul (x_n) este convergent.

b)Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi funcţia $f:[a,b]\to[a,b]$ astfel încât $f(x)\ge x,(\forall)x\in[a,b]$. Dacă definim şirul $(x_n)_{n\ge1}$, astfel încât $x_1\in(a,b)$ şi $x_{n+1}=f(x_n),(\forall)n\ge1$, atunci şirul (x_n) este convergent.

Generalizarea 2:

Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi funcţiile $f,g:[a,b]\to[a,b]$ astfel încât $f(x)\le x, g(x)\le x,(\forall)x\in[a,b]$ sau $f(x)\ge x, g(x)\ge x,(\forall)x\in[a,b]$. Dacă definim şirul $(x_n)_{n\ge1}$ astfel încât $x_1\in(a,b)$ şi $x_{n+1}=\begin{cases} f(x_n), \text{dacă } n \text{ este par} \\ g(x_n), \text{dacă } n \text{ este impar}\end{cases}$, atunci şirul (x_n) este convergent.

Soluţie:

Dacă $f(x)\le x, g(x)\le x,(\forall)x\in[a,b]$, atunci $x_{n+1}-x_n=\begin{cases} f(x_n)-x_n\le 0, \text{dacă } n \text{ este par} \\ g(x_n)-x_n\le 0, \text{dacă } n \text{ este impar}\end{cases}$

$\Rightarrow x_{n+1}-x_n\le 0,(\forall)n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ că şirul (x_n) este descrescător şi cum $x_n\in[a,b],(\forall)n\in\mathbb{N}$, folosind teorema lui Weierstrass, deducem că şirul (x_n) este convergent.Analog se demonstrează convergenţa şirului (x_n) în cealaltă situaţie.

Cazuri particulare:

1. Fie $a\in(0,1)$ şi şirul $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin $x_1=a, x_{n+1}=\dfrac{x_n+a}{1+ax_n}$. Arătaţi că şirul (x_n) este convergent şi calculaţi limita sa.

2. Fie $a,b\in(0,1)$ şi şirul $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin $x_1=a, x_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{x_n+a}{1+ax_n}, \text{dacă } n \text{ este par}\\ \dfrac{x_n+b}{1+bx_n}, \text{dacă } n \text{ este impar}\end{cases}$

. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent.

3. Fie $a>0$ şi şirul $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin $x_1\in(0,a), x_{n+1}=\sqrt{a^2-a+x_n},(\forall)n\ge1$. Arătaţi că şirul (x_n) este convergent si calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

4. Fie $a>0$ şi $b\in(0,1]$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin $x_1\in[a,a+1], x_{n+1}=bx_n^{\ 2}-2abx_n+a(ab+1)$ este convergent şi determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Problema 8

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{n+n}\right)$;

b) Să se demonstreze că există un şir de numere reale pozitive $(a_n)_{n>0}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+a_1}+\frac{1}{n+a_2}+...+\frac{1}{n+a_n}\right)=\frac{2007}{2008}.$$

Călin Oanea, profesor, Suceava

Generalizare

a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{pn+1}+\frac{1}{pn+2}+...+\frac{1}{qn}\right)$,unde $p,q\in\mathbb{N}^*, p<q$;

b) Să se demonstreze că pentru orice $\lambda\in\left(0,\frac{q-p}{p}\right)$ există un şir de numere reale pozitive $(a_n)_{n>0}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{pn+a_1}+\frac{1}{pn+a_2}+...+\frac{1}{pn+a_{(q-p)n}}\right)=\lambda$.

Soluție

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{pn+1}+\frac{1}{pn+2}+...+\frac{1}{qn}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{(q-p)n}\frac{1}{p+\frac{k}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{(q-p)n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int\limits_0^{q-p}f(x)dx=$

$\ln\frac{q}{p}$ **,**unde $f(x)=\frac{1}{p+x}$ este o funcție continuă pe $[0,q-p]$.

b) Se poate căuta un şir de forma $a_n=an+b$, unde $a>b>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{pn+a_1}+\frac{1}{pn+a_2}+...+\frac{1}{pn+a_{(q-p)n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{(q-p)n}\frac{1}{p+\frac{a_k}{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{(q-p)n}\frac{1}{p+\frac{ak+b}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{(q-p)n}\frac{1}{p+a\frac{k+\frac{b}{a}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\Delta_n,\xi_k)=\int_0^{q-p}\frac{1}{p+ax}dx=$$

$\frac{\ln\left(1+\frac{a(q-p)}{p}\right)}{a}$, unde $\frac{k}{n}<\xi_k=\frac{k+\frac{b}{a}}{n}<\frac{k+1}{n}$.

Deoarece funcția $g(a)=\frac{\ln\left(1+\frac{a(q-p)}{p}\right)}{a}$ este continuă pe intervalul $(0,\infty)$ şi are valori în intervalul $\left(0,\frac{q-p}{p}\right)$, există $a_0\in(0,\infty)$ astfel încât $g(a_0)=\lambda$.

Cazuri particulare

1. a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}\right)$;

b) Să se demonstreze că pentru orice $\lambda\in(0,2)$,există un şir de numere reale pozitive $(a_n)_{n>0}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+a_1}+\frac{1}{n+a_2}+...+\frac{1}{n+a_{2n}}\right)=\lambda$.

2. a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{4n}\right)$;

b) Să se demonstreze că pentru orice $\lambda\in(0,3)$, există un şir de numere reale pozitive $(a_n)_{n>0}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+a_1}+\frac{1}{n+a_2}+...+\frac{1}{n+a_{3n}}\right)=\lambda$.

3. a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+...+\frac{1}{6n}\right)$;

b) Să se demonstreze că pentru orice $\lambda\in(0,2)$,există un şir de numere reale pozitive $(a_n)_{n>0}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+a_1}+\frac{1}{2n+a_2}+...+\frac{1}{2n+a_{4n}}\right)=\lambda$.

Colegiul Național de Informatică „Spiru Haret”
Str. Zorilor nr. 17, Suceava
E-mail: ionbursuc@yahoo.com