



ASUPRA UNEI PROBLEME DIN “GAZETA MATEMATICĂ”

Ion Bursuc

Motto: Deci au zis către El: Ce să facem, ca să săvârșim lucrările lui Dumnezeu? Iisus a răspuns și le-a zis: Aceasta este lucrarea lui Dumnezeu, ca să credeți în Acela pe Care El L-a trimis.
(Ioan, cap. 6, v. 28, 29)

În Gazeta Matematică Nr. 11 din anul 1999 a apărut următoarea problemă:

Să se calculeze: $\int \left(\frac{\arctg x}{\arctg x - x} \right)^2 dx, x > 0.$

(Gheorghe Marchitan)

Problema se remarcă prin tehnica matematică folosită în rezolvarea ei, precum și prin faptul că a fost propusă și la alte concursuri interjudețene și olimpiade de matematică.

Deși o problemă de matematică este foarte frumoasă, dacă nu se cunosc și alte probleme foarte asemănătoare sau generalizări ale ei, ea nu poate fi folosită cu succes în munca de formare cu priceperi și deprinderi ale elevilor la clasă sau la competițiile școlare. Din acest motiv, în cele ce urmează voi da unele generalizări ale problemei de mai sus și voi arăta cum se pot construi și alte probleme asemănătoare.

Propoziția 1: Fie $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I – interval) și $g(x) \neq 0, (\forall) x \in I$ două funcții cu f

continuuă și g derivabilă cu derivată continuă pe I , astfel încât $\frac{f^2}{g^2} = 2 \left(\frac{1}{g} \right)' \cdot F$, unde

F este primitivă a funcției f . Atunci avem: $\int \left(1 + \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 dx = x + \frac{2F(x)}{g(x)} + C$

Soluție

Folosind formula de integrare prin părți, putem scrie:

$$\begin{aligned} \int \left(1 + \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 dx &= \int dx + 2 \int \frac{f(x)}{g(x)} dx + \int \frac{f^2(x)}{g^2(x)} dx = x + 2 \int \frac{f(x)}{g(x)} dx + 2 \int \left(\frac{1}{g(x)} \right)' F(x) dx = \\ &= x + 2 \int \frac{f(x)}{g(x)} dx + \frac{2F(x)}{g(x)} - 2 \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = x + \frac{2F(x)}{g(x)} + C. \end{aligned}$$

Observația 1: Folosind propoziția 1 pentru $f(x) = x, g(x) = \arctg x - x$, observând

că $\frac{f^2(x)}{g^2(x)} = \frac{x^2}{(\arctg x - x)^2} = -2 \frac{(\arctg x - x)'}{(\arctg x - x)^2} \left(\frac{x^2 + 1}{2} \right) = 2 \left(\frac{1}{g(x)} \right)' F(x)$, obținem:

$$\int \left(\frac{\arctg x}{\arctg x - x} \right)^2 dx = x + \frac{x^2 + 1}{\arctg x - x} + C$$

Propoziția 2: Fie funcțiile $f, g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ cu I interval, $g(x) \neq 0, (\forall) x \in I$, f și h continue pe I , iar g derivabilă cu derivată continuă pe I . Dacă $\frac{f^2 h}{g^2} = 2 \left(\frac{1}{g} \right)' F$, unde

F este o primitivă a funcției $f \cdot h$, atunci $\int \left(1 + \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 h(x) dx = \frac{2}{g(x)} F(x) + \int h(x) dx$.

Soluție:

Folosind formula de integrare prin părți putem scrie:

$$\begin{aligned} \int \left(1 + \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 h(x) dx &= \int h(x) dx + 2 \int \frac{f(x)h(x)}{g(x)} dx + \int \frac{f^2(x)h(x)}{g^2(x)} dx = \\ &= \int h(x) dx + 2 \int \frac{f(x)h(x)}{g(x)} dx + 2 \int \left(\frac{1}{g(x)} \right)' F(x) dx = \\ &= \int h(x) dx + 2 \int \frac{f(x)h(x)}{g(x)} dx + \frac{2F(x)}{g(x)} - 2 \int \frac{1}{g(x)} f(x)h(x) dx = \int h(x) dx + \frac{2F(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Dacă vom considera funcțiile $f, g, h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n-1}$, n impar,

$g(x) = \operatorname{arctg} x - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $h(x) = \frac{1}{x^{2n-2}}$, observând că:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{g(x)} \right)' F(x) &= -2 \frac{g'(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{1+x^2}{2} = -2 \frac{\frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k}}{g^2(x)} \cdot \frac{1+x^2}{2} = \\ &= -\frac{1 - (x^{2n-2} - x^{2n-4} + \dots + 1)(1+x^2)}{g^2(x)} = -\frac{1 - ((x^2)^n + 1)}{g^2(x)} = \frac{x^{2n}}{g^2(x)} = \frac{f^2(x)h(x)}{g^2(x)}, \end{aligned}$$

unde $F(x) = \frac{x^2+1}{2} \in \int f(x) \cdot h(x) dx = \int x dx$, obținem:

$$\begin{aligned} \int \left(1 + \frac{x^{2n-1}}{\operatorname{arctg} x - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n-3}}{2n-3} - \dots - x} \right)^2 \cdot \frac{1}{x^{2n-2}} dx &= \frac{x^2+1}{\operatorname{arctg} x - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots - x} - \\ &- \frac{1}{(2n-3)x^{2n-3}} + C, (\forall) n, \text{ impar}, \end{aligned}$$

ceea ce constituie o generalizare a exercițiului propus în Gazeta Matematică.

Vom arăta în continuare cum obținem și alte exerciții asemănătoare cu cel prezentat la începutul notei.

Relația $\frac{f^2}{g^2} = 2 \left(\frac{1}{g} \right)' F$ din enunțul Propoziției 1 se poate scrie și sub forma:

$$\frac{f^2}{g^2} = -\frac{2g'F}{g^2} \Leftrightarrow g' = \frac{-(F')^2}{2F} \quad (1)$$

Dacă alegem $g = \ln p - p$ și $F = ap, a \in \mathbb{R}^*$, unde $p: I \rightarrow (0, \infty)$ derivabilă pe I cu

$p'(x) \neq 0, (\forall) x \in I$, atunci relația (1) devine:

$$\frac{p'}{p} - p' = -\frac{a(p')^2}{2p} \Leftrightarrow 2 - 2p = -ap' \Leftrightarrow ap' - 2p + 2 = 0 \Leftrightarrow p' - kp = -k, \text{ unde } k = \frac{2}{a} \Leftrightarrow \text{Din}$$

$$\Leftrightarrow (p(x)e^{-kx})' = (e^{-kx})', (\forall) x \in I \Leftrightarrow (\exists) \alpha \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } p(x) = 1 + \alpha e^{kx}, (\forall) x \in I.$$

concluzia propoziției 1, obținem:

$$\int \left(\frac{\ln(1 + \alpha e^{kx}) - 1 + \alpha e^{kx}}{\ln(1 + \alpha e^{kx}) - 1 - \alpha e^{kx}} \right)^2 dx = x + \frac{4}{k} \frac{1 + \alpha e^{kx}}{\ln(1 + \alpha e^{kx}) - 1 - \alpha e^{kx}} + C, x \in \mathbb{R}, \text{ dacă } \alpha > 0 \text{ și}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{k} \ln \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \right), \text{ dacă } \alpha < 0, k > 0, x \in \left(\frac{1}{k} \ln \left(-\frac{1}{\alpha} \right), \infty \right), \text{ dacă } \alpha < 0, k < 0.$$

Aplicație:

Să vedem acum, cum se folosesc propozițiile de mai sus pentru calculul următoarei integrale:

$$\int \left(1 - \frac{b^3}{\sqrt[5]{x^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt[5]{x}} - \frac{b}{\sqrt[5]{x}} \right)} \right)^2 dx, x > 0, b > 0.$$

Soluție:

Relația $\frac{f^2}{g^2} = 2 \left(\frac{1}{g} \right)' F$ din enunțul propoziției 1 se scrie sub

$$\text{forma: } f^2 = -2g'F \Leftrightarrow \frac{f^2}{-2F} = g' \quad (2)$$

Relația (2) ne sugerează să considerăm funcția $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt[5]{x}} - \frac{b}{\sqrt[5]{x}}$

$g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ și nu $g(x) = \sqrt[5]{x} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt[5]{x}} - \frac{b}{\sqrt[5]{x}} \right)$ deoarece în cea de-a doua situație g'

ar conține funcția arctg . Dacă mai considerăm funcția

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-b^3}{\sqrt[5]{x^3}}, F(x) \in \int f(x) dx, F(x) = -\frac{5}{2} b^3 x^{\frac{2}{5}} + k, \text{ atunci relația (2)}$$

$$\begin{aligned} \text{devine } \frac{\frac{b^6}{\sqrt[5]{x^6}}}{-2 \left(-\frac{5}{2} b^3 x^{\frac{2}{5}} + k \right)} &= \frac{\left(\frac{b}{\sqrt[5]{x}} \right)'}{1 + \frac{b^2}{\sqrt[5]{x^2}}} - \left(\frac{b}{\sqrt[5]{x}} \right)' \Leftrightarrow \frac{b^6}{5b^3 \sqrt[5]{x^8} - 2k \sqrt[5]{x^6}} = \frac{-\frac{b}{5 \sqrt[5]{x^6}} \left(-\frac{b^2}{\sqrt[5]{x^2}} \right)}{1 + \frac{b^2}{\sqrt[5]{x^2}}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{b^3}{5b^3 \sqrt[5]{x^8} - 2k \sqrt[5]{x^6}} = \frac{1}{5 \sqrt[5]{x^8} + 5b^2 \sqrt[5]{x^6}} \Leftrightarrow k = -\frac{5b^5}{2}. \end{aligned}$$

Folosind rezultatul propoziției 1, obținem:

$$\int \left(1 - \frac{b^3}{\sqrt[5]{x^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt[5]{x}} - \frac{b}{\sqrt[5]{x}} \right)} \right)^2 dx = x + \frac{-5b^3 \sqrt[5]{x^2} - 5b^5}{\operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt[5]{x}} - \frac{b}{\sqrt[5]{x}}} + C.$$

Probleme propuse:

1. Calculați:

$$\mathbf{a)} \int \left(\frac{\ln(1+e^x)-1+e^x}{\ln(1+e^x)-1-e^x} \right)^2 dx, x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \mathbf{b)} \int \left(\frac{\ln(1-e^x)-1-e^x}{\ln(1-e^x)-1+e^x} \right)^2 dx, x \in (-\infty, 0) \quad ;$$

$$\mathbf{c)} \int \left(\frac{e^x \ln(1+e^x) - xe^x - e^x + 1}{e^x \ln(1+e^x) - xe^x - e^x - 1} \right)^2 dx, x \in \mathbb{R}.$$

2. Calculați:

$$\mathbf{a)} \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\arctg x - x} \right)^2 dx, x > 0. \quad \mathbf{b)} \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^3}{\arctg x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x} \right)^2 dx, x > 0.$$

Bibliografie:

1. Gazeta Matematică 1985-2000

Colegiul Național de Informatică „Spiru Haret”

Str. Zorilor nr. 17, Suceava

E-mail: ionbursuc@yahoo.com