CREAȚII MATEMATICE SERIA B
ARTICOLE ȘI STUDII ȘTIINȚIFICE

ISSN online 2246-9451

Generalizări ale unor probleme date la concursul Colegiului Național „Mihai Eminescu" ,Satu Mare

de Ion Bursuc

Motto: Lucrați nu pentru mâncarea cea pieritoare, ci pentru mâncarea ce rămâne spre viața veșnică și pe care o va da vouă Fiul Omului, căci pe El L-a pecetluit Dumnezeu-Tatăl.

(Ioan,cap.6,v.27)

1. Considerăm punctele M, N, P situate în planul triunghiului ABC astfel: $M \in Int(\sphericalangle ABC)$, $N \in Int(\sphericalangle ACB)$, $P \in Int(\sphericalangle BAC)$.

Dacă $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}$ arătați că:

a) $\triangle MNP \sim \triangle BCA$; b) $4S_{ABC}=S_{MNP}$.

(clasa a IX-a / 2007, autor: prof. Alexandru Blaga)

Generalizare:

Considerăm punctele M, N, P situate în planul triunghiului ABC astfel: $M \in Int(\sphericalangle ABC)$, $N \in Int(\sphericalangle ACB)$, $P \in Int(\sphericalangle BAC)$.Dacă există $k>0$ astfel încât $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{NA}+k\overrightarrow{NB}-k\overrightarrow{NC}$ și $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PC}-k\overrightarrow{PA}$ atunci avem: $a)$ $\triangle MNP \sim \triangle BCA$; $b)$ $(1+k)^2 S_{ABC}=S_{MNP}$.

Soluție:

Relația $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{NA}+k\overrightarrow{NB}-k\overrightarrow{NC}$ se scrie:

$$\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{NB}-\left(\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{NC}\right)=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}+k\overrightarrow{BN}-\left(\overrightarrow{CM}+k\overrightarrow{CN}\right)=\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+k)\overrightarrow{BP_1}-(1+k)\overrightarrow{CP_1}=\overrightarrow{NM} \Rightarrow (1+k)\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{NM} \qquad (1)$$

unde $P_1 \in (NM)$ cu $\frac{MP_1}{P_1N}=k$. Fie $M_1 \in (PN)$, $\frac{NM_1}{M_1P}=k$ .Analog ,relația $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PC}-k\overrightarrow{PA}$ se scrie: $\left(\overrightarrow{CN}+k\overrightarrow{CP}\right)-\left(\overrightarrow{AN}+k\overrightarrow{AP}\right)=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow (1+k)\overrightarrow{CM_1}-(1+k)\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{PN} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1+k)\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PN} \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă concluzia.

2. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC. Arătați că:

$$\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\sqrt{(c+a)^2-b^2}+\sqrt{(a+b)^2-c^2} \le \sqrt{3}(a+b+c).$$

(clasa a IX-a / 2007, autori: prof. Ovidiu Pop și Zdravco Starc)

Generalizarea 1:

Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC și α, β, $\delta>0$. Arătați că:

$$\alpha\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\beta\sqrt{(c+a)^2-b^2}+\delta\sqrt{(a+b)^2-c^2} \le \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\delta^2}\,(a+b+c)$$

Soluție:

Se aplică inegalitatea lui Cauchy-Schwarz astfel:

$$\alpha\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\beta\sqrt{(c+a)^2-b^2}+\delta\sqrt{(a+b)^2-c^2}\le$$
$$\le\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\delta^2)\left[(b+c)^2-a^2+(c+a)^2-b^2+(a+b)^2-c^2\right]}=$$
$$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\delta^2}\,(a+b+c).$$

Generalizarea 2:

Fie $a,\ b,\ c$ lungimile laturilor triunghiului ABC şi $\alpha,\ \beta,\ \delta>0$. Dacă $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ şi f^2 este o funcție concavă ,arătați că:

$$\alpha f\left((b+c)^2-a^2\right)+\beta f\left((c+a)^2-b^2\right)+\gamma f\left((a+b)^2-c^2\right)\le$$
$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\sqrt{3}\cdot f\left(\frac{(a+b+c)^2}{3}\right)$$

Soluție:

$$\alpha f\left((b+c)^2-a^2\right)+\beta f\left((c+a)^2-b^2\right)+\gamma f\left((a+b)^2-c^2\right)\le$$
$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\sqrt{f^2\left((b+c)^2-a^2\right)+f^2\left((c+a)^2-b^2\right)+f^2\left((a+b)^2-c^2\right)}\le$$
$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\sqrt{3f^2\left(\frac{(b+c)^2-a^2+(c+a)^2-b^2+(a+b)^2-c^2}{3}\right)}=$$
$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\sqrt{3}\cdot f\left(\frac{(a+b+c)^2}{3}\right).$$

Cazuri particulare

1. Fie $a,\ b,\ c$ lungimile laturilor triunghiului ABC. Arătați că:

$$a\sqrt{(b+c)^2-a^2}+b\sqrt{(c+a)^2-b^2}+c\sqrt{(a+b)^2-c^2}\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,(a+b+c)$$

2. Fie $a,\ b,\ c$ lungimile laturilor triunghiului ABC. Arătați că:

$$a\sqrt{(b+c)^2-a^2}+b\sqrt{(c+a)^2-b^2}+c\sqrt{(a+b)^2-c^2}\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,(a+b+c)$$

3. Fie $a,\ b,\ c$ lungimile laturilor triunghiului ABC. Arătați că:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{(c+a)^2-b^2}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{(a+b)^2-c^2}\le(a+b+c)\sqrt{a+b+c}$$

4. Fie $a,\ b,\ c$ lungimile laturilor triunghiului ABC şi $\alpha,\ \beta,\ \gamma>0$. Arătați că

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{b+c-a}+\sqrt{\beta}\sqrt{c+a-b}+\sqrt{\gamma}\sqrt{a+b-c}\le\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(a+b+c)}$$

5. Fie $a,\ b,\ c$ lungimile laturilor triunghiului ABC şi $\alpha,\ \beta,\ \gamma>0$. Arătați că:

$$\alpha\sqrt[n]{(b+c)^2-a^2}+\beta\sqrt[n]{(c+a)^2-b^2}+\gamma\sqrt[n]{(a+b)^2-c^2}\le\sqrt{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\cdot\sqrt[n]{\frac{(a+b+c)^2}{3}}$$

3. Fie $a,\ b,\ z_1,\ z_2\in\mathbb{C}^*$ pentru care avem: $|az_1+bz_2|<|\overline{a}b+z_1\overline{z_2}|$.

Arătați că $|z_1|<|b|\Leftrightarrow|z_2|<|a|$.

(clasa a X-a / 2007, autor: prof. Mircea Fărcaş)

Generalizare

Fie $a,\ b,\ z_1,\ z_2,\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \omega\in\mathbb{C}^*$ pentru care avem: $\omega\overline{\delta}=\alpha\overline{\beta}$, $|\alpha|=|\beta|=|\delta|=|\omega|$ şi $|\alpha az_1+\beta bz_2|<|\delta\overline{a}b+\omega z_1\overline{z_2}|$. Arătați că $|z_1|<|b|\Leftrightarrow|z_2|<|a|$.

Soluție:

Putem scrie succesiv:

$$\left|\delta\overline{a}b+\omega z_1\overline{z_2}\right|^2-\left|\alpha az_1+\beta bz_2\right|^2=\left(\delta\overline{a}b+\omega z_1\overline{z_2}\right)\left(\overline{\delta}a\overline{b}+\overline{\omega z_1}z_2\right)-$$
$$-\left(\alpha az_1+\beta bz_2\right)\left(\overline{\alpha a z_1}+\overline{\beta b z_2}\right)=|\delta|^2|a|^2|b|^2+\delta\overline{a}b\overline{\omega z_1}z_2+$$
$$\omega\overline{\delta}a\overline{b}z_1\overline{z_2}+|\omega|^2|z_1|^2|z_2|^2-$$
$$-|\alpha|^2|a|^2|z_1|^2-\alpha a\overline{\beta b}z_1\overline{z_2}-\beta b\overline{\alpha a z_1}z_2-|\beta|^2|b|^2|z_2|^2=$$
$$|\alpha|^2|a|^2|b|^2+|\alpha|^2|z_1|^2|z_2|^2-$$
$$-|\alpha|^2|a|^2|z_1|^2-|\alpha|^2|b|^2|z_2|^2=|\alpha|^2\left(|a|^2-|z_2|^2\right)\left(|b|^2-|z_1|^2\right)>0$$ de unde rezultă concluzia.

Cazuri particulare

1. Fie $a,\ b,\ z_1,\ z_2\in\mathbb{C}^*$ pentru care avem: $\left|az_1+ibz_2\right|<\left|i\cdot\overline{a}b+z_1\overline{z_2}\right|$.Arătați că $|z_1|<|b|\Leftrightarrow|z_2|<|a|$.

2. Fie $a,\ b,\ z_1,\ z_2,\alpha\in\mathbb{C}^*$ pentru care avem: $|\alpha|=1$ și $\left|\alpha az_1+bz_2\right|<\left|\overline{a}b+\alpha z_1\overline{z_2}\right|$.Arătați că $|z_1|<|b|\Leftrightarrow|z_2|<|a|$.

3. Fie $a,\ b,\ z_1,\ z_2,\ \alpha\in\mathbb{C}^*$ pentru care avem: $|\alpha|=1$ şi $\left|az_1+\alpha bz_2\right|<\left|\alpha\overline{a}b+z_1\overline{z_2}\right|$.Arătați că $|z_1|<|b|\Leftrightarrow|z_2|<|a|$.

4. Determinați valoarea minimă a sumei $\dfrac{a}{a+2b}+\dfrac{b}{b+2a}$, unde $a,\ b\in(0,\ \infty)$.

(clasa a IX-a / 2006, autor: prof. Alexandru Blaga)

Generalizare:

Fie $\alpha,\ \beta\in(0,\ \infty)$ cu $\alpha\le\beta$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Determinați valoarea minimă a expresiei.

$$\frac{a+b}{a^n+b^n}\left(\frac{a^n}{\alpha a+\beta b}+\frac{b^n}{\alpha b+\beta a}\right)$$ când $a,\ b\in(0,\ \infty)$.

Soluție: Vom demonstra că dacă $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2>0$ atunci

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}\ge 2\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\Leftrightarrow(y_2-y_1)\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\ge 0$$.Întradevăr

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}\ge 2\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\Leftrightarrow\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)+\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1y_2-y_1x_2}{y_1(y_1+y_2)}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_2(y_1+y_2)}\ge 0\Leftrightarrow(x_1y_2-y_1x_2)\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\ge 0\Leftrightarrow(y_2-y_1)\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\ge 0.$$

În continuare demonstrăm că $\dfrac{a+b}{a^n+b^n}\left(\dfrac{a^n}{\alpha a+\beta b}+\dfrac{b^n}{\alpha b+\beta a}\right)\ge\dfrac{2}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{a^n}{\alpha a+\beta b}+\frac{b^n}{\alpha b+\beta a}\ge\frac{2}{\alpha+\beta}\cdot\frac{a^n+b^n}{a+b}\Leftrightarrow$$

$$(\alpha b+\beta a-\alpha a-\beta b)\left(\frac{a^n}{\alpha a+\beta b}-\frac{b^n}{\alpha b+\beta a}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(b-a)(\alpha-\beta)\frac{\alpha a^nb+\beta a^{n+1}-\alpha ab^n-\beta b^{n+1}}{(\alpha a+\beta b)(\alpha b+\beta a)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-b)(\beta-\alpha)\left[\alpha ab\left(a^{n-1}-b^{n-1}\right)+\beta\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)\right]\ge 0$$ (inegalitate adevărată).

Prin urmare $\min\limits_{a,\, b>0} \frac{a+b}{a^n+b^n}\left(\frac{a^n}{\alpha a+\beta b}+\frac{b^n}{\alpha b+\beta a}\right)=\frac{2}{\alpha+\beta}$, dacă $\alpha \le \beta$.

Egalitatea se obține pentru $\alpha=\beta$ sau $a=b$.

Observație: Din demonstrația dată se observă că pentru $\alpha>\beta$ avem

$$\max_{a,\, b>0} \frac{a+b}{a^n+b^n}\left(\frac{a^n}{\alpha a+\beta b}+\frac{b^n}{\alpha b+\beta a}\right)=\frac{2}{\alpha+\beta}$$

Cazuri particulare şi probleme asemănătoare.

1. Fie $\alpha,\ \beta\in(0,\ \infty)$ cu $\alpha\le\beta$. Arătați că

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}\left(\frac{a^2}{\alpha a+\beta b}+\frac{b^2}{\alpha b+\beta a}\right)\ge\frac{2}{\alpha+\beta} \quad ,(\forall)a,\ b\in(0,\ \infty).$$

2. Fie $\alpha,\ \beta\in(0,\ \infty)$ cu $\alpha\ge\beta$. Arătați că

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}\left(\frac{a^2}{\alpha a+\beta b}+\frac{b^2}{\alpha b+\beta a}\right)\le\frac{2}{\alpha+\beta} \quad ,(\forall)a,\ b\in(0,\ \infty).$$

3. Fie $\alpha,\ \beta\in(0,\ \infty)$ cu $\alpha\le\beta$. Arătați că

$$\frac{a+b}{a^3+b^3}\left(\frac{a^3}{\alpha a+\beta b}+\frac{b^3}{\alpha b+\beta a}\right)\ge\frac{2}{\alpha+\beta} \quad ,(\forall)a,\ b\in(0,\ \infty).$$

4. Fie $\alpha,\ \beta\in(0,\ \infty)$ cu $\alpha\ge\beta$. Arătați că

$$\frac{a+b}{a^3+b^3}\left(\frac{a^3}{\alpha a+\beta b}+\frac{b^3}{\alpha b+\beta a}\right)\le\frac{2}{\alpha+\beta} \quad ,(\forall)a,\ b\in(0,\ \infty).$$

5.Fie $\alpha,\ \beta\in(0,\ \infty)$ cu $\alpha\le\beta$, $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ şi funcția crescătoare $g:(0,\infty)\to(0,\infty), g(x)=\frac{f(x)}{x}$.Arătați că pentru orice $a,b>0$ avem:

$$\frac{a+b}{f(a)+f(b)}\left(\frac{f(a)}{\alpha a+\beta b}+\frac{f(b)}{\alpha b+\beta a}\right)\ge\frac{2}{\alpha+\beta} \quad ,(\forall)a,\ b\in(0,\ \infty).$$

6. Fie $\alpha,\ \beta\in(0,\ \infty)$ cu $\alpha\ge\beta$, $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ şi funcția crescătoare $g:(0,\infty)\to(0,\infty), g(x)=\frac{f(x)}{x}$.Arătați că pentru orice $a,b>0$ avem:

$$\frac{a+b}{f(a)+f(b)}\left(\frac{f(a)}{\alpha a+\beta b}+\frac{f(b)}{\alpha b+\beta a}\right)\le\frac{2}{\alpha+\beta} \quad ,(\forall)a,\ b\in(0,\ \infty).$$

5. Determinați toate funcțiile strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația $f(f(x))=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

(clasa a IX-a / 2006)

Generalizare:

Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strict crescătoare şi bijectivă. Determinați funcțiile strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că $f\circ g=g\circ f$ şi $(f\circ f\circ g\circ g)(x)=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Soluție: Vom arăta că $f=g^{-1}$

Presupunem că există $x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0)\ne g^{-1}(x_0)$

<u>Cazul I:</u> $f(x_0)<g^{-1}(x_0)$

Se observă că din relația $f\circ g=g\circ f$ obținem $f\circ g^{-1}=g^{-1}\circ f$

Din faptul că f este strict crescătoare şi $f(x_0)<g^{-1}(x_0)\Rightarrow f(f(x_0))<$

$< f\left(g^{-1}\left(x_0\right)\right)=g^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right)\Rightarrow f\left(f\left(x_0\right)\right)<g^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right)$ (1)

Din relația $\left(f\circ f\circ g\circ g\right)(x)=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\circ f=g^{-1}\circ g^{-1}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow g^{-1}\left(g^{-1}\left(x_0\right)\right)<g^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right)\Rightarrow g^{-1}\left(x_0\right)<f\left(x_0\right)$ ceea ce contrazice ipoteza.

Cazul II: $f\left(x_0\right)>g^{-1}\left(x_0\right)$

Din f crescătoare $\Rightarrow f\left(f\left(x_0\right)\right)>f\left(g^{-1}\left(x_0\right)\right)\Rightarrow g^{-1}\left(g^{-1}\left(x_0\right)\right)>g^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right)\Rightarrow\Rightarrow g^{-1}\left(x_0\right)>f\left(x_0\right)$ (contradicție) .Prin urmare pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $f(x)=g^{-1}(x)\Rightarrow f=g^{-1}$

Observație: Pentru $g=1_{\mathbb{R}}$ obținem problema dată la concurs.

Cazuri particulare şi probleme asemănătoare.

1.Determinați funcțiile strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că $f\left(x^3\right)=f^3(x)$ şi $\left(f\circ f\right)\left(x^9\right)=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

2. Determinați funcțiile strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că $f\left(x^5\right)=f^5(x)$ şi $\left(f\circ f\right)\left(x^{25}\right)=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

3. Determinați funcțiile strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că $f\left(\sqrt[3]{x}\right)=\sqrt[3]{f(x)}$ şi $\left(f\circ f\right)\left(\sqrt[9]{x}\right)=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

4. Determinați funcțiile strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că $f\left(\sqrt[5]{x}\right)=\sqrt[5]{f(x)}$ şi $\left(f\circ f\right)\left(\sqrt[25]{x}\right)=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

6. Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ astfel încât $A^{2006}+A^{2007}+A^{2008}=O_n$ şi $B=A^2+A+I_n$. Arătați că: a) $(AB)^k=A^kB^k$, $(\forall)k\in\mathbb{N}^*$; b) $(AB)^{2006}=O_n$.

(clasa a XI-a / 2006, autor: prof. Traian Tămâian)

Generalizare:

Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi există $r, p\in\mathbb{N}$ astfel încât $A^p+A^{p+1}+...+A^{p+r}=O_n$ .Dacă $B=A^r+A^{r-1}+...+A+I_n$, atunci avem:

a) $(AB)^k=A^kB^k$, $(\forall)k\in\mathbb{N}^*$; b) $(AB)^p=O_n$

Soluție: Se observă că matricile A şi B comută.
Relația de la a) se demonstrează prin inducție matematică. Pentru relația de la b) se observă că $A^p\cdot B=O_n\Rightarrow(AB)^p=A^pB^p=\left(A^pB\right)B^{p-1}=O_n$.

Cazuri particulare şi probleme asemănătoare.

1. Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi există $p\in\mathbb{N}$ astfel încât $A^p+A^{p+1}+A^{p+2}+A^{p+3}=O_n$ .Dacă $B=A^3+A^2+A+I_n$, atunci avem:

a) $(AB)^k=A^kB^k$, $(\forall)k\in\mathbb{N}^*$; b) $(AB)^p=O_n$.

2. Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi există $p\in\mathbb{N}$ astfel încât $A^p+A^{p+1}+A^{p+2}+A^{p+3}+A^{p+4}=O_n$ .Dacă $B=A^4+A^3+A^2+A+I_n$, atunci avem: a) $(AB)^k=A^kB^k$, $(\forall)k\in\mathbb{N}^*$; b) $(AB)^p=O_n$.

3. Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi există $p\in\mathbb{N},\alpha,\beta,\gamma,\omega\in\mathbb{R}$ astfel încât $\omega A^p+\gamma A^{p+1}+\beta A^{p+2}+\alpha A^{p+3}=O_n$ .Dacă $B=\alpha A^3+\beta A^2+\gamma A+\omega I_n$, atunci avem: a) $(AB)^k=A^kB^k$, $(\forall)k\in\mathbb{N}^*$; b) $(AB)^p=O_n$.

4. Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi există $p\in\mathbb{N},\alpha,\beta,\gamma,\omega\in\mathbb{R}$ astfel încât $\theta A^p+\omega A^{p+1}+\gamma A^{p+2}+\beta A^{p+3}+\alpha A^{p+4}=O_n$.Dacă $B=\alpha A^4+\beta A^3+\gamma A^2+\omega A+\theta I_n$, atunci avem: a) $(AB)^k=A^kB^k$, $(\forall)k\in\mathbb{N}^*$; b) $(AB)^p=O_n$.

7. Dacă $x,\ y\in\mathbb{N}$ astfel încât $3x+5y=20$, să se arate că $4\leq x+y\leq 6$.

(clasa a V-a / 2003, autor: prof. Ovidiu Pop)

Generalizare:

Fie numerele naturale $x,\ y,\ a,\ b,\ c$ cu $0<a<b<c$ astfel încât $ax+by=c$. Dacă considerăm numerele naturale p şi q cu $p|a$, $q|b$, $p\geq q$ atunci $\left[\frac{cq}{b}\right]\leq px+qy\leq\left[\frac{cp}{a}\right]$.

Soluţie:

Fie $a_1,\ b_1\in\mathbb{N}$ astfel încât $a=pa_1$, $b=qb_1$.Din

$$p\geq q\Rightarrow a_1q\leq a_1p<b\Rightarrow c=ax+by=a_1(px+qy)+(b-a_1q)y\geq a_1(px+qy)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow px+qy\leq\frac{c}{a_1}=\frac{cp}{a}\Rightarrow px+qy\leq\left[\frac{cp}{a}\right] \qquad (1)$$

Analog din $p\geq q\Rightarrow b_1p\geq b_1q=b>a\Rightarrow c=ax+by=b_1(px+qy)+(a-b_1p)x\leq$

$$\leq b_1(px+qy)\Rightarrow px+qy\geq\frac{c}{b_1}=\frac{cq}{b}\Rightarrow px+qy\geq\left[\frac{cq}{b}\right] \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow\left[\frac{cq}{b}\right]\leq px+qy\leq\left[\frac{cp}{a}\right]$.

Cazuri particulare

1. Fie numerele naturale $x,\ y$ astfel încât $2x+5y=1000$. Atunci $200\leq x+y\leq 500$.

2. Fie numerele naturale $x,\ y$ astfel încât $2x+3y=1000$. Atunci $333\leq x+y\leq 500$.

3. Fie numerele naturale $x,\ y,\ a,\ b,\ c$ cu $0<a<b<c$, astfel încât $ax+by=c$. Atunci $\left[\frac{c}{b}\right]\leq x+y\leq\left[\frac{c}{a}\right]$.

4. Fie numerele naturale $x,\ y,\ a,\ b,\ c,p,q$ cu $0<pa<qb<c$, $p\geq q$ astfel încât $pax+qby=c$.

Atunci $\left[\frac{c}{b}\right]\leq px+qy\leq\left[\frac{c}{a}\right]$.