CREAŢII MATEMATICE SERIA B
ARTICOLE ŞI STUDII ŞTIINŢIFICE

ISSN online 2246-9451

Generalizări ale unor probleme date la Olimpiada de Matematică

Ion Bursuc

Motto: Tot ce-Mi dă Tatăl, va veni la Mine; şi pe cel ce vine la Mine nu-l voi scoate afară; Pentru că M-am coborât din cer, nu ca să fac voia mea, ci voia Celui ce M-a trimis pe Mine. Şi aceasta este voia Celui ce M-a trimis, ca din toţi pe care Mi i-a dat Mie să nu pierd nici unul, ci să-i înviez pe ei în ziua cea de apoi.
(Ioan,cap.6,v.37,38,39)

1. Fie şirul cu termenul general $x_n = n\cdot\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right),(\forall)n\ge 1$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge 1}$ este mărginit.

b) Este şirul $(x_n)_{n\ge 1}$ convergent?

(O.L,Constanţa,2000,Constantin Caragea)

Generalizare:

Fie şirul cu termenul general $x_n = n\cdot\cos\left(\pi\sqrt[k]{n^k+a_1n^{k-1}+a_2n^{k-2}+\ldots+a_{k-1}n+a_k}\right),(\forall)n\ge 1$, unde $k\in\mathbb{N},k\ge 2,a_1=\frac{k}{2},a_2>0,\ldots,a_k>0$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge 1}$ este mărginit.

b) Este şirul $(x_n)_{n\ge 1}$ convergent?

Soluţie

a)Deoarece $\cos\alpha=(-1)^{n+1}\sin\left(\alpha-(2n+1)\frac{\pi}{2}\right),(\forall)\alpha\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}$,dacă notăm $\alpha_n=\sqrt[k]{n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_k}$ obţinem :

$$x_n=n\cdot\cos(\pi\alpha_n)=n(-1)^{n+1}\sin\left(\pi\alpha_n-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=$$

$$n(-1)^{n+1}\sin\pi\frac{\alpha_n^{\ k}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^k}{\alpha_n^{\ k-1}+\alpha_n^{\ k-2}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\alpha_n\left(n+\frac{1}{2}\right)^{k-2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^{k-1}}=$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin\pi\cdot y_n}{\pi\cdot y_n}\cdot\pi\cdot n\cdot y_n \text{ ,unde } \lim_{n\to\infty}y_n = =\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^{\ k}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^k}{\alpha_n^{\ k-1}+\alpha_n^{\ k-2}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(n+\frac{1}{2}\right)^{k-1}}=0 \text{ ,iar}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sum_{r=2}^{k}\left(a_r-C_k^r\left(\frac{1}{2}\right)^r\right)n^{k-r}}{\alpha_n^{\ k-1}+\alpha_n^{\ k-2}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(n+\frac{1}{2}\right)^{k-1}}=$$

$$=\frac{a_2-\frac{k(k-1)}{8}}{k}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{(-1)^{n+1}}=\pi\frac{a_2-\frac{k(k-1)}{8}}{k}\Rightarrow$$ şirul x_n este mărginit.

b)Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=-\frac{a_2-\frac{k(k-1)}{8}}{k}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=\frac{a_2-\frac{k(k-1)}{8}}{k}$ deducem că şirul x_n este convergent numai în cazul când $a_2=\frac{k(k-1)}{8}$.

Cazuri particulare

1.Fie şirul cu termenul general $x_n=n\cdot\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+2}\right),(\forall)n\geq1$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ este mărginit.

b)Este şirul $(x_n)_{n\geq1}$ convergent?

2.Fie şirul cu termenul general $x_n=n\cdot\cos\left(\pi\sqrt[3]{n^3+\frac{3}{2}n^2+n+1}\right),(\forall)n\geq1$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ este mărginit.

b)Este şirul $(x_n)_{n\geq1}$ convergent?

3.Fie şirul cu termenul general $x_n=n\cdot\cos\left(\pi\sqrt[3]{n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{4}n+1}\right),(\forall)n\geq1$

a) Să se arate că şirul (x_n) este mărginit.

b) Este şirul $(x_n)_{n\geq1}$ convergent?

4.Fie şirul cu termenul general $x_n=n\cdot\cos\left(\pi\sqrt[4]{n^4+2n^3+3n^2+n+1}\right),(\forall)n\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că şirul (x_n) este mărginit.

b) Este şirul $(x_n)_{n\geq1}$ convergent?

2.Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,monotonă pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}(f(2x)-f(x))=0$.

a)Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}(f(2^n x)-f(x))=0,(\forall)n\geq1$.

b)Să se arate că: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(ax)-f(x))=0,(\forall)a\geq1$.

Generalizare

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,monotonă şi $a,b>0$ cu $a>b$ astfel încât: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(ax)-f(bx))=0$.

a)Să se arate că: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n x\right)-f(x)\right)=0,(\forall)n\in\mathbb{N}$.

b) Să se arate că: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(cx)-f(dx))=0,(\forall)\ c,d>0$ cu $c>d$.

Soluție:

a) Fie $\alpha=\frac{a}{b}>1$.Din definiția limitei deducem că :

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(a\cdot\frac{x}{b}\right)-f\left(b\cdot\frac{x}{b}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(f(\alpha x)-f(x)\right)=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(f\left(\alpha^k x\right)-f\left(\alpha^{k-1}x\right)\right)=0,(\forall)k\in\mathbb{N},k\geq 1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(f\left(\alpha^n x\right)-f(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\alpha^k x\right)-f\left(\alpha^{k-1}x\right)\right)=0$$

b)Fie $\beta=\frac{c}{d}>1$. Cum $\bigcup_{k=0}^{\infty}\left[\alpha^k,\alpha^{k+1}\right)=[1,\infty)$ deducem că există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât

$\alpha^k\leq\beta<\alpha^{k+1}$.Fie f crescătoare.$\Rightarrow$ $f\left(\alpha^k x\right)-f(x)\leq f(\beta x)-f(x)\leq f\left(\alpha^{k+1}x\right)-f(x),(\forall)x>0$

.Cum $\lim_{x\to\infty}\left(f\left(\alpha^k x\right)-f(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(\alpha^{k+1}x\right)-f(x)\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(f(\beta x)-f(x)\right)=0$.

Analog se procedează în cazul când f este descrescătoare.

Din faptul că $\lim_{x\to\infty}\left(f(\beta x)-f(x)\right)=0$ deducem că :

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(cx)-f(dx)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(f(\beta\cdot dx)-f(dx)\right)=0$$

Cazuri particulare:

1.Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,crescătoare pentru care $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-f(3x)\right)=0$.Să se arate că:a)

$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-f\left(3^k x\right)\right)=0,(\forall)k\in\mathbb{N}$.

b) $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-f(ax)\right)=0,(\forall)a\in\mathbb{R},a\geq 1$.

2.Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,crescătoare pentru care $\lim_{x\to\infty}\left(f(3x)-f(2x)\right)=0$.Să se arate că: a)

$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(\frac{3^n x}{2^n}\right)-f(x)\right)=0,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$;b) $\lim_{x\to\infty}\left(f(ax)-f(x)\right)=0,(\forall)a>0$.

3.Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,descrescătoare pentru care $\lim_{x\to\infty}\left(f(4x)-f(3x)\right)=0$.Să se arate că :a)

$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(\frac{4^n x}{3^n}\right)-f(x)\right)=0,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

b) $\lim_{x\to\infty}\left(f(ax)-f(bx)\right)=0,(\forall)a,b>0$.

4.Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,crescătoare pentru care $\lim_{x\to\infty}\left(f(3x)-f(x)\right)=0$.Să se arate că: a)

$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(3^n x\right)-f(x)\right)=0,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

b) $\lim_{x\to\infty}\left(f(ax)-f(bx)\right)=0,(\forall)a,b>0$.

c) $\lim_{x\to\infty}\left(a_1 f(b_1 x)+a_2 f(b_2 x)+...+a_n f(b_n x)-(a_1+a_2+...+a_n)f(x)\right)=0,$

$(\forall)a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$ şi $b_1,b_2,...,b_n>0$

3.Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)$.

(O.L.,Suceava,2000)

Generalizare:

Fie $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$ şi $\alpha, a>0$. Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\left(\sqrt[k]{x+a}-2\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{x-a}\right)$.

Soluție

Notăm cu L limita din enunț.Observăm că

$$\sqrt[k]{x+a}-2\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{x-a}=\sqrt[k]{x+a}-\sqrt[k]{x}-\left(\sqrt[k]{x}-\sqrt[k]{x-a}\right)=$$

$$=\frac{a}{\sum\limits_{r=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{x+a}\right)^{k-1-r}\left(\sqrt[k]{x}\right)^{r}}-\frac{a}{\sum\limits_{r=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{x-a}\right)^{k-1-r}\left(\sqrt[k]{x}\right)^{r}}=$$

$$-a\frac{\sum\limits_{r=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{x}\right)^{r}\left(\left(\sqrt[k]{x+a}\right)^{k-1-r}-\left(\sqrt[k]{x-a}\right)^{k-1-r}\right)}{\sum\limits_{r=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{x+a}\right)^{k-1-r}\left(\sqrt[k]{x}\right)^{r}\cdot\sum\limits_{r=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{x-a}\right)^{k-1-r}\left(\sqrt[k]{x}\right)^{r}}$$

Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[k]{x}\right)^{k-1}}{\sum\limits_{r=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{x+a}\right)^{k-1-r}\left(\sqrt[k]{x}\right)^{r}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{r=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{\frac{x+a}{x}}\right)^{k-1-r}}=\frac{1}{k}$. (1)

Analog avem: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[k]{x}\right)^{k-1}}{\sum\limits_{r=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{x-a}\right)^{k-1-r}\left(\sqrt[k]{x}\right)^{r}}=\frac{1}{k}$. (2)

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{r=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{x}\right)^{r+1}\left(\left(\sqrt[k]{x+a}\right)^{k-1-r}-\left(\sqrt[k]{x-a}\right)^{k-1-r}\right)=\lim_{x\to\infty}\sum_{r=0}^{k-2}\left(\sqrt[k]{x}\right)^{r+1}\left(\sqrt[k]{x-a}\right)^{k-1-r}\cdot$$

$$\frac{\left(\left(\sqrt[k]{\frac{x+a}{x-a}}\right)^{k-1-r}-1\right)}{\frac{\sqrt[k]{x+a}}{\sqrt[k]{x-a}}-1}\left(\frac{\sqrt[k]{x+a}}{\sqrt[k]{x-a}}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{r=0}^{k-2}\left(\sqrt[k]{x}\right)^{r+1}\left(\sqrt[k]{x-a}\right)^{k-1-r}(k-1-r)\frac{\sqrt[k]{\frac{x+a}{x-a}}-1}{\frac{x+a}{x-a}-1}\cdot\frac{2a}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{r=0}^{k-2}\frac{2ax}{x-a}\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{\sqrt[k]{x-a}}\right)^{r}\left(\sqrt[k]{\frac{x-a}{x}}\right)^{k-1}\frac{k-1-r}{k}=\frac{2a}{k}\left((k-1)^{2}-\frac{(k-2)(k-1)}{2}\right)=$$

$$=\frac{a(k-1)}{k}\left(2(k-1)-(k-2)\right)=\frac{a(k-1)}{k}\cdot k=a(k-1).\qquad(3)$$

Din relațiile (1),(2) şi (3) obținem:

$$L=\lim_{x\to\infty}x^{\alpha}(-a)\cdot\frac{1}{k^{2}}\cdot\frac{a(k-1)}{\left(\sqrt[k]{x}\right)^{2k-2}\cdot\sqrt[k]{x}}=-\frac{a^{2}(k-1)}{k^{2}}\lim_{x\to\infty}x^{\alpha-2}\sqrt[k]{x}=$$

$$=\begin{cases}0,\text{dacă } \alpha-2+\frac{1}{k}<0\\ -\frac{a^{2}(k-1)}{k^{2}},\text{dacă } \alpha=2-\frac{1}{k}\\ -\infty,\text{ dacă } \alpha>2-\frac{1}{k}\end{cases}$$

Probleme propuse

1. Fie $a>0$. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-a}\right)$.

2. Fie $a>0$. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x+a}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-a}\right)$.

3. Fie $a>0$. Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to\infty} x\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt[4]{x+a}-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-a}\right)$.

4. Fie $a\ge 0, b>0$. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+b}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-b}}$.

5. Fie $a,b>0$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+a}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-a}}{\sqrt[3]{x+b}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-b}}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x+a}-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-a}}{\sqrt[4]{x+b}-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-b}}$

6. Fie $\alpha, a>0$. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\left(\ln(x+a)-2\ln x+\ln(x-a)\right)$.

7. Fie $a,b>0$. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+a)-2\ln x+\ln(x+a)}{\ln(x+b)-2\ln x+\ln(x-b)}$.

8. Fie $\alpha, a>0$. Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}+a}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}-a}\right)$.

9. Fie $a,b>0$. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}+a}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}-a}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}+b}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}-b}}$.

10. Fie $a>0$ şi $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L\in[0,\infty)$. Să se calculeze :

$\lim\limits_{x\to\infty} x\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a+f(x)}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-a-f(x)}\right)$.

11. Fie $a>0$, $k\in\mathbb{N}, k\ge 0$, şi $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L\in[0,\infty)$.

Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sqrt[k]{x^{k-1}}\left(\sqrt[k]{x+a+f(x)}-2\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{x-a-f(x)}\right)$.

4. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea zecimală a lui x.

(O.L., Vrancea, 2000)

Generalizare

Fie $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$, asfel încât $a^2=1+b$, $c^2=1+d$ şi $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$. Să se calculeze

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\alpha\left(a+\sqrt{b}\right)^n+\beta\left(c+\sqrt{d}\right)^n\right\}$.

Soluție

Fie $a_n,b_n,c_n,d_n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\left(a+\sqrt{b}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{b}$ şi $\left(c+\sqrt{d}\right)^n=c_n+d_n\sqrt{d}$.

Se arată că : $\left(a-\sqrt{b}\right)^n=a_n-b_n\sqrt{b}$ şi $\left(c-\sqrt{d}\right)^n=c_n-d_n\sqrt{d}$.

$\alpha\left(a+\sqrt{b}\right)^n+\beta\left(c+\sqrt{d}\right)^n=2\alpha a_n-\alpha\left(a-\sqrt{b}\right)^n+2\beta c_n-\beta\left(c-\sqrt{d}\right)^n=$

$=2\alpha a_n+2\beta c_n-1+1-\alpha\left(a-\sqrt{b}\right)^n-\beta\left(c-\sqrt{d}\right)^n$

Pentru n suficient de mare avem: $\left\{\alpha\left(a+\sqrt{b}\right)^{n}+\beta\left(c+\sqrt{d}\right)^{b}\right\}=$

$=1-\alpha\left(a-\sqrt{b}\right)^{n}-\beta\left(c-\sqrt{d}\right)^{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\alpha\left(a+\sqrt{b}\right)^{n}+\beta\left(c+\sqrt{d}\right)^{n}\right\}=1.$

Cazuri particulare

1. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(5+\sqrt{24}\right)^{m}\right\}\cdot\left\{\left(3+\sqrt{8}\right)^{n}\right\}.$

2. Să se calculeze : $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{2\left(4+\sqrt{15}\right)^{n}+3\left(3+\sqrt{8}\right)^{n}\right\}.$

3. Să se calculeze : $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{3\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+2\left(6+\sqrt{35}\right)^{n}\right\}.$

4. Să se calculeze : $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{3\left(3+\sqrt{8}\right)^{n}+2\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\right\}.$

5. Se consideră şirul $(a_n)_{n-1}$ definit prin relaţia: $a_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}$ .Să se calculeze :

$\lim\limits_{n\to\infty}3^{n}\left(a_n-\frac{5}{18}\right)^{n}$.

(O.J.,Bistriţa-Năsăud,1997,Petre Anghel)

Generalizare 1

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia : $a_n=\frac{1}{1\cdot(1+k)}+\frac{1}{2\cdot(2+k)}+\ldots+\frac{1}{n(n+k)}$ .Să se calculeze : $\lim\limits_{n\to\infty}k^{n}\left(a_n+\frac{1}{k}-\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{k\cdot r}\right)^{n}$.

Soluţie:

$$a_n=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+k)}=\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+k}\right)=\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=0}^{k-1}\left(\frac{1}{r+s}-\frac{1}{r+s+1}\right)=$$

$$\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+s}-\frac{1}{r+s+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{n+s+1}\right)=\frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{n+s}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}k^{n}\left(a_n+\frac{1}{k}-\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{kr}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{n+r}\right)^{n}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{n+r}\right)^{-\frac{1}{\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{n+r}}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}-n\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{n+r}}=e^{-k}.$$

Generalizare 2

Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere strict pozitive şi şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_n=\alpha(a_n-a_{n+k})$, unde $\alpha>0$ şi $k\in\mathbb{N},k\geq 1$. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$ .Să se calculeze :

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha^{y_n}}\left(x_n+\alpha-\alpha\sum_{r=1}^{k}a_r\right)^{y_n}$ ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\sum_{r=1}^{k}a_{r+n}=L>0$.

Soluţie:

Observăm că: $x_n=\sum_{r=1}^{n}b_r=\sum_{r=1}^{n}\alpha\left(a_r-a_{r+k}\right)=\alpha\sum_{r=1}^{k}\left(a_r-a_{r+n}\right)$, (sumă telescopică de pas k) de unde deducem că $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha^{y_n}}\left(x_n+\alpha-\alpha\sum_{r=1}^{k}a_r\right)^{y_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sum_{r=1}^{k}a_{r+n}\right)^{y_n}=$

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\sum_{r=1}^{k}a_{r+n}\right)^{-\frac{1}{\sum_{r=1}^{k}a_{r+n}}}\right]^{-\lim_{n\to\infty}y_n\sum_{r=1}^{k}a_{r+n}}=e^{-L}$$

Cazuri particulare

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{n(n+4)}$. Să se calculeze :

$\lim_{n\to\infty}4^n\left(a_n-\frac{13}{48}\right)^n$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{n(n+5)}$.

Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}5^n\left(a_n-\frac{77}{300}\right)^n$.

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n=\frac{10}{24}+\frac{14}{120}+\ldots+\frac{4n+6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{3}\right)^n$.

6. Fie $A,B\in M_3(\mathbb{R}), A\neq B$. Dacă $A^3=B^3$ şi $A^2B=B^2A$, demonstraţi că matricea A^2+B^2 nu este inversabilă.

(O.J.,Gorj,1997)

Generalizare 1

Fie $n,k\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ şi $A,B\in M_n(\mathbb{R}), A\neq B$. Dacă $A^{k+1}=B^{k+1}$ şi $A^kB=B^kA$, demonstraţi că matricea A^k+B^k nu este inversabilă.

Soluţie:

Dacă presupunem că A^k+B^k este inversabilă şi notăm $C=A^k+B^k$, atunci avem: $A-B=C^{-1}(A^k+B^k)(A-B)=C^{-1}\left(A^{k+1}-A^kB+B^kA-B^{k+1}\right)=O_n\Rightarrow A=B$ ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, C nu este inversabilă.

Generalizare 2

Fie $n,k\in\mathbb{N}^*, n\geq 2, \lambda\in\mathbb{R}$ şi $A,B\in M_n(\mathbb{R}), A\neq\lambda B$. Dacă $A^{k+1}=\lambda B^{k+1}$ şi $\lambda A^kB=B^kA$, demonstraţi că matricea A^k+B^k nu este inversabilă.

Soluţie:

Dacă matricea $C=A^k+B^k$ ar fi inversabilă, atunci matricea $A-\lambda B=C^{-1}\left(A^k+B^k\right)\left(A-\lambda B\right)=C^{-1}\left(A^{k+1}-\lambda A^kB+B^kA-\lambda B^{k+1}\right)=O_n\Rightarrow$ $A=\lambda B$ ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, A^k+B^k nu este inversabilă.

Cazuri particulare

1. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R}), A \neq B$. Dacă $A^4 = B^4$ și $A^3B = B^3A$, demonstrați că matricea $A^3 + B^3$ nu este inversabilă.
2. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ și $A^3 = \lambda B^3, A \neq \lambda B, B^2A = \lambda A^2B$, demonstrați că $A^2 + B^2$ nu este inversabilă.
3. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R}), AB = BA, A^2 + B^2 = AB, A + B \neq O_n, A^2B + B^2A = O_n$, demonstrați că AB nu este inversabilă.

7. Fie $(x_n)_{n\geq1}$ un şir astfel încât $x_n \in (0,2]$ şi $x_{n+1} \leq x_n^2 - x_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ este constant.

(O.J., Giurgiu, 1997, Şerban Olteanu)

Generalizare

Fie $\lambda > 0$ şi $(x_n)_{n\geq1}$ un şir astfel încât $x_n \in (0, 1+\lambda]$ şi $x_{n+1} \leq x_n^2 - \lambda x_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ este constant.

Soluție:

Deoarece relația $x_{n+1} \leq x_n^2 - \lambda x_n$ se scrie: $0 < x_{n+1} \leq x_n(x_n - \lambda)$ deducem că:
$x_n - \lambda > 0, (\forall) n \geq 1 \Rightarrow x_n > \lambda, (\forall) n \geq 1$.
Avem: $x_{n+1} - x_n \leq x_n(x_n - 1 - \lambda) \leq 0 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ este descrescător şi cum este mărginit este convergent.
Fie: $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [\lambda, 1+\lambda] \Rightarrow L \leq L^2 - \lambda L \Rightarrow L(L - 1 - \lambda) \geq 0 \Rightarrow L \geq 1 + \lambda$ şi cum
$L \leq 1 + \lambda \Rightarrow L = 1 + \lambda \Rightarrow x_n \geq \inf\{x_n | n \in \mathrm{N}^*\} = 1 + \lambda \geq x_n, (\forall) n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow x_n = 1 + \lambda, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Cazuri particulare

1. Fie $(x_n)_{n\geq1}$ un şir astfel încât $x_n \in (0,3]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_{n+1} \leq x_n{}^2 - 2x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că şirul $(x_n) n \geq 1$ este constant.

2. Fie $(x_n) n \geq 1$ un şir astfel încât $x_n \in (0,5], x_{n+1} \leq x_n{}^2 - 4x_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ este constant.

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq1}$ astfel încât $x_n \in (-3,4], x_{n+1} \leq x_n{}^2 - 12, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$, este constant.

8. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+a^x)}{\ln(1+b^x)}; a > 0, b > 0$

(O.L., Bistrița-Năsăud, 2000)

Generalizare

Fie $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n > 0$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + a_1{}^x + a_2{}^x + ... + a_n{}^x)}{\ln(1 + b_1{}^x + b_2{}^x + ... + b_n{}^x)} = L$

Solutie:

Fie $A = \{a_i \mid i = \overline{1,n}\}, B = \{b_i \mid i = \overline{1,n}\}$ $m_a = \min\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $M_a = \max\{a_1, a_2, ..., a_3\}$. Analog definim m_b si M_b.

Cazul I $a_1, a_2, ..., a_n \in (0,1)$, $b_1, b_2, ..., b_n \in (0,1) \Rightarrow$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+a_1^x+a_2^x+...+a_n^x\right)}{a_1^x+a_2^x+...+a_n^x}\cdot\frac{b_1^x+b_2^x+...+b_n^x}{\ln\left(1+b_1^x+...+b_n^x\right)}\cdot\frac{a_1^x+a_2^x+...+a_n^x}{b_1^x+b_2^x+...+b_n^x}=$$

$$=\begin{cases}0,\text{dacă }\ M_a<M_b\\ \dfrac{p}{q},\text{dacă }\ M_a=M_b,\text{ unde } p=card\{i\,|\,a_i=M_a\}\text{și } q=card\ \{i\,|\,b_i=M_b\}\\ +\infty,\text{dacă } M_a>M_b\end{cases}$$

Cazul II $M_a=1$ şi $M_b<1\Rightarrow L=+\infty$

Cazul III $M_a=M_b=1\Rightarrow L=\dfrac{\ln p}{\ln q}$

Cazul IV $M_a<1, M_b\geq 1\Rightarrow L=0$

Cazul V $M_a=1, M_b>1\Rightarrow L=0$

Cazul VI $M_a>1, M_a\leq 1\Rightarrow L=\infty$

Cazul VII $M_a>1, M_a>1\Rightarrow L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(M_a\right)^x\left(\dfrac{1}{M_a^{\ x}}+p+\sum\limits_{k\in V}\left(\dfrac{a_k}{M_a}\right)^x\right)}{\ln\left(M_b\right)^x\left(\dfrac{1}{M_b^{\ x}}+q+\sum\limits_{k\in U}\left(\dfrac{b_k}{M_b}\right)^x\right)}=$

$=\dfrac{\ln M_a+\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{M_a^{\ x}}+p+\sum\limits_{k\in V}\left(\dfrac{a_k}{M_a}\right)^x\right)}{\ln M_b+\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{M_b^{\ x}}+q+\sum\limits_{k\in U}\left(\dfrac{b_k}{M_b}\right)^x\right)}=\dfrac{\ln M_a}{\ln M_b}$, unde $V=\{1,2,...,n\}-\{i\,|\,a_i=M_a\}$ şi

$U=\{1,2,...,n\}-\{i\,|\,b_i=M_b\}$

Cazuri particulare

1.Fie $a,b>0$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+a^x+\dfrac{1}{a^x}\right)}{\ln\left(1+b^x+\dfrac{1}{b^x}\right)}$.

2.Fie $a,b>0$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+a^x+a^{2x}\right)}{\ln\left(1+b^x+b^{2x}\right)}$.

3.Fie $a,b>0$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+a^x+a^xb^x\right)}{\ln\left(1+b^x+a^xb^x\right)}$.

9. Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue în origine, care verifică relația:
$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)+xy\left(x+y\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$

*(**O.L. Dolj,2000**)*

Generalizare

Fie $a\in\mathbb{R}^*$. Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue în origine, care verifică relația:
$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)+axy\left(x+y\right)$, $x,y\in\mathbb{R}$

Soluție

Relația din enunț se scrie astfel $\frac{3}{a} f(x+y)=\frac{3}{a} f(x)+\frac{3}{a} f(y)+3xy(x+y)$,

$(\forall)x,y\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3}{a} f(x+y)-(x+y)^3=\frac{3}{a} f(x)-x^3+\frac{3}{a} f(y)-y^3 \quad ,(\forall)x,y\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow g(x+y)=g(x)+g(y),(\forall)x,y\in\mathbb{R}$, unde $g(x)=\frac{3}{a} f(x)-x^3$

Cum f este continuă în origine $\Rightarrow g$ este continuă în origine $\Rightarrow g$ este continuă pe $\mathbb{R}$ deoarece se știe că o funcție ce satisface relația funcțională a lui Cauchy este continuă pe $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ este continuă într-un punct.

$\Rightarrow (\exists)\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $g(x)=\alpha x \Rightarrow f(x)=\frac{a}{3}\left(x^3+\alpha x\right)$

Probleme propuse

1.Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue în origine, care verifică relația:

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy\left(2x^2+2y^2+3xy\right)$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

2. Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue în origine, ce verifică relația:

$f(x+y)=f(x)+f(y)+axy\left(2x^2+2y^2+3xy\right)$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

3. Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue în origine, care verifică relația:

$f(x+y)=f(x)+f(y)+axy(x+y)+b$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$, unde $a\in\mathbb{R}^*$ și $b\in\mathbb{R}$.

10. Fie $k\geq 2$ număr natural și funcția continuă $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)=f\left(x^k\right),(\forall)x\in[0,\infty)$. Să se arate că funcția f este constantă.

(O.L., Giurgiu, 2000)

Generalizare

Fie $k>1,k\in\mathbb{R},a\geq 1$ și funcția continuă $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)=af\left(x^k\right)$. Să se determine funcția f .

Soluție:

Pentru x înlocuit cu x^{k^n} obținem: $f\left(x^{k^n}\right)=af\left(x^{k^{n+1}}\right),(\forall)x\geq 0$

$\Rightarrow a^n f\left(x^{k^n}\right)=a^{n+1} f\left(x^{k^{n+1}}\right),(\forall)x\geq 0$ și $n\in\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow a^n f\left(x^{k^n}\right)=a^0 f\left(x^{k^0}\right)=f(x)$

Înlocuind în această relație pe x cu $x^{\frac{1}{k^n}}$ obținem: $f(x)=\frac{1}{a^n} f\left(x^{\frac{1}{k^n}}\right)$, $(\forall n\in\mathbb{N})$ și $x\geq 0$

$$\Rightarrow f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{a^n} f\left(x^{\frac{1}{k^n}}\right)=\begin{cases}0, \text{ dacă } a>1\\ f(1), \text{dacă } a=1 \text{ și } x\neq 0\end{cases}$$

Pentru $a=1\Rightarrow f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^{k^n}}\right)=f(0)\Rightarrow f(x)=f(1)\Rightarrow f$ este funcție constantă.

Cazuri particulare

1.Determinați funcțiile continue $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$f(x)=f\left(x^k\right)+x-x^k,(\forall)x\geq 0,k\in\mathbb{N}^*,k\geq 2$.

2. Determinați funcțiile continue $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că există $a>1$ astfel încât

$f(x)=af\left(x^k\right)+x-ax^k,(\forall)x\geq 0$.

3. Determinați funcțiile continue $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x)=f(x^2)+\frac{x(x-1)}{(1+x)(1+x^2)},(\forall x\geq 0)\ .$$

4. Determinați funcțiile continue $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x)=f(x^3)+\frac{x(x-1)}{x^3+1},(\forall)x\geq 0\ .$$

11. Fie $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A+B=I_n$ şi $A^3=A^2$. Să se arate că : I_n+AB este inversabilă şi să se determine inversa sa.

(O.L., Gorj, 2000)

Generalizare

Fie $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ şi $k\in\mathbb{N}^*,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha A^{k+1}=A^k$ şi $\alpha A+\beta B=I_n$. Să se arate că

$I_n+A^pB^p$, unde $p=\begin{cases}\frac{k}{2}, \text{unde } n \text{ este par}\\ \frac{k+1}{2}, \text{unde } n \text{ este impar}\end{cases}$,este inversabilă şi să se determine inversa.

Soluție :

Din relația $\alpha A+\beta B=I_n\Rightarrow\alpha A^2+\beta BA=A$ şi $\alpha A^2+\beta AB=A\ \Rightarrow AB=BA$

Tot din relația $\alpha A+\beta B=I_n$ rezultă că: $\alpha A^{k+1}+\beta A^kB=A^k$ şi

$\alpha A^{k+1}+\beta BA^k=A^k\Rightarrow A^kB=BA^k=O_n\ \Rightarrow(I_n+A^pB^p)(I_n-A^pB^p)\ =I_n-A^{2p}B^{2p}=I_n$ deoarece

$2p\geq k$ şi $A^kB=0$. Analog $(I_n-A^pB^p)(I_n+A^pB^p)=I_n\ \Rightarrow I_n+A^pB^p$ este inversabilă şi inversa ei este $I_n-A^pB^p$.

Cazuri particulare

1. Fie $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^4=A^3$ şi $A+B=I_n$. Să se arate că matricele I_n+A^2B şi $I_n+A^2B^2$ sunt inversabile şi să se detrmine inversele.

2. Fie $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha A^3=A^2$ şi $\alpha A+\beta B=I_n$.

Să se arate că I_n+AB este inversabilă şi să se determine inversa.

12. Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(x+f(x))=x,\ (\forall)x>0$. Să se arate că f este monotonă.

(O.J., Iaşi, 2000)

Generalizare

Fie $f,g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ două funcții continue cu g injectivă şi $g(0)=0$. Dacă există $\alpha>0$ astfel încât $f(x+\alpha f(x))=g(x),(\forall)x\geq 0$, să se arate că f este monotonă.

Soluție:

Pentru $x=0\Rightarrow f(\alpha f(0))=g(0)\Rightarrow f(\alpha x_0)=g(0)=0$, unde $x_0=f(0)$. Pentru x înlocuit cu αx_0 obținem: $f(\alpha x_0+\alpha f(\alpha x_0))=g(\alpha x_0)\Rightarrow f(\alpha x_0)=g(\alpha x_0)\Rightarrow g(\alpha x_0)=g(0)\Rightarrow\alpha x_0=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_0=0\Rightarrow f(0)=0$. Pentru $x\geq 0$ consider funcția $h_x:[0,x]\to\mathbb{R},h_x(t)=t+\alpha f(t)-x$.

Observ că $h_x(0)\cdot h_x(x)=-x\cdot\alpha f(x)\leq 0\Rightarrow(\exists)y\in[0,x]$ astfel încât $h_x(y)=0\Rightarrow\ y+\alpha f(y)=x$

Fie $x_1, x_2 \in [0,\infty]$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (\exists) y_1 \in [0, x_1]$ şi $y_2 \in [0, x_2]$ astfel încât $y_1 + \alpha f(y_1) = x_1$ şi $y_2 + \alpha f(y_2) = x_2 \Rightarrow f(y_1 + \alpha f(y_1)) = f(y_2 + \alpha f(y_2))$
$\Rightarrow g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ este injectivă şi cum este continuă este monotonă.

Cazuri particulare

1. Fie $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(x + 2f(x)) = x^2$, $(\forall) x > 0$. Să se arate că f este monotonă.

2. Fie $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(x + 3f(x)) = x^3 + 3x$, $(\forall) x > 0$. Să se arate că f este monotonă.

3. Să se arate că nu există funcții $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$, continue astfel încât $f(x + f(x)) = 1 + x$, $(\forall) x \geq 0$.

13. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}, x_n \geq 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_{n+1}{}^3 \leq 3x_n - 2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se calculeze limita.

(O.J., Mehedinți, 2000)

Generalizare

Fie $\alpha > 0$ şi $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. Considerăm şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}, x_n \geq 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_{n+1}^p \leq \alpha^{p-1} p x_n - \alpha^p (p-1), (\forall) n \in \mathbb{N}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se calculeze limita.

Soluție:

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

(1) $\alpha^{p-1} p x_n \geq (p-1)\alpha^p + x_{n+1}^p \geq p \sqrt[p]{\underbrace{\alpha^p \cdot \alpha^p \ldots \cdot \alpha^p}_{p-1 ori} \cdot x_{n+1}^p} = p \cdot \alpha^{p-1} \cdot x_{n+1}$

$\Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi cum este mărginit inferior de 0 este convergent. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Trecem la limită în inegalitățile (1)
$\Rightarrow \alpha^{p-1} pL \geq (p-1)\alpha^p + L^p \geq p\alpha^{p-1} L \Rightarrow$ că are loc egalitate în inegalitatea mediilor
$\Rightarrow \alpha^p = L^p \Rightarrow L = \alpha$.

Cazuri particulare

1. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}, x_n \geq 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_{n+1}{}^4 \leq 4x_n - 3$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se calculeze limita.

2. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}, x_n \geq 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_{n+1}{}^5 \leq 5x_n - 4$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se calculeze limita.

3. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}, x_n \geq 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_{n+1}{}^3 \leq 12x_n - 16$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se calculeze limita.

14. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A + B = AB$.

a) Arătați că: $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

b) Arătați că: $rang(A + B) = n$ dacă şi numai dacă $\max(rangA, rangB) = n$.

(O.J., Neamţ, 2000, Gheorghe Ciorăscu)

Generalizare

Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $\alpha A + \beta B = AB, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

a) Arătați că $\det\left(A^2+B^2\right)\geq 0$.

b) Arătați că $rang\left(\alpha A+\beta B\right)=n \iff \max\left(rangA,\ rangB\right)=n$

Soluție:

a) Relația $\alpha A+\beta B=AB$ se scrie:

$\left(\beta I_n-A\right)\left(\alpha I_n-B\right)=\alpha\beta I_n \Rightarrow \left(\alpha I_n-B\right)\left(\beta I_n-A\right)=$

$=\alpha\beta I_n \Rightarrow \alpha A+\beta B=BA \Rightarrow AB=BA \Rightarrow \det\left(A^2+B^2\right)=\det\left(A-iB\right)\left(A+iB\right)=$

$=\det\left(A-iB\right)\cdot\det\left(A+iB\right)=\overline{\det\left(A+iB\right)}\cdot\det\left(A+iB\right)=\left|\det\left(A+iB\right)\right|^2\geq 0$

b) $rang\left(\alpha A+\beta B\right)=n \iff \det\left(\alpha A+\beta B\right)\neq 0 \iff \det AB\neq 0 \iff \det A\neq 0$ şi

$\det B\neq 0 \iff rangA=n$ şi $rangB=n \Rightarrow \max\left(rangA, rangB\right)=n$

Reciproc : fie $rangA=n \Rightarrow \det A\neq 0$ şi cum

$B\left(A-\beta I_n\right)=\alpha A \Rightarrow \det B\neq 0 \Rightarrow rangB=n$

În cazul cand $rangB=n$ din $A\left(B-\alpha I_n\right)=\beta B$ deducem că $rangA=n$.

15. Fie a,b numere reale, $a<b$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât :

$\int_a^b f\left(a+b-x+t\right)dx \geq \int_a^b f\left(x\right)dx, (\forall),\ t\in\mathbb{R}$. Demonstrați că : $f\left(a\right)=f\left(b\right)$.

(O.J.,Dolj ,1997, Cristian Moanta)

Generalizare

Fie α, a, b numere reale, $a<b$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât:

$\int_a^b f\left(a+b-x+t\right)dx \geq \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f\left(x\right)dx, (\forall)t\in\mathbb{R}$. Demonstrați că: $f\left(a+\alpha\right)=f\left(b+\alpha\right)$.

Soluție

Cu substituția $a+b-x+t=u$ deducem că

$\int_a^b f\left(a+b-x+t\right)dx=-\int_{b+t}^{a+t} f\left(u\right)du=\int_{a+t}^{b+t} f\left(x\right)dx$ .Considerăm funcția

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g\left(t\right)=\int_{a+t}^{b+t} f\left(x\right)dx$ .Inegalitatea din enunț se scrie: $g\left(t\right)\geq g\left(\alpha\right),\ (\forall)t\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha$ este punct de minim pentru funcția derivabilă g .Din teorema lui Fermat deducem că $g'\left(\alpha\right)=0$.

Cum $g'\left(t\right)=f\left(b+t\right)-f\left(a+t\right) \Rightarrow f\left(a+\alpha\right)=f\left(b+\alpha\right)$.

Cazuri particulare

1. Fie a,b numere reale , $a<b$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât:

$\int_a^b f\left(a+b-x+t\right)dx \geq \int_{2a}^{a+b} f\left(x\right)dx, (\forall)\ t\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $f\left(2a\right)=f\left(a+b\right)$.

2. Fie a,b numere reale , $a<b$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât:

$\int_a^b f\left(a+b-x+t\right)dx \geq \int_{a+b}^{2b} f\left(x\right)dx, (\forall)t\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $f\left(a+b\right)=f\left(2b\right)$.

3. Fie a,b numere reale , $a<b$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât:

$\int_a^b f\left(a+b-x+t\right)dx \geq \int_{0}^{b-a} f\left(x\right)dx, (\forall)t\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $f\left(0\right)=f\left(b-a\right)$.

16. Fie $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că există $a\in(0,1)$ astfel încât : $f(x)=\int_0^{ax} f(t)dt$, $(\forall)x\geq 0$ .Arătați că $f(x)=0,(\forall)x\in[0,\infty]$.

(O.J.,Iaşi ,1997,Bendea Gheorghe)

Generalizare

Fie $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că există $a,b\in(0,1)$ şi $A,B>0$ astfel încât: $f(x)=A\int_0^{ax} f(t)dt+B\int_0^{bx} f(t)dt,(\forall)x\geq 0$ .Arătați că $f(x)=0,(\forall)x\in[0,\infty)$.

Soluție

Observ că $f(0)=0$.

Fie $x>0$ şi $M=\max\{f(t)|t\in[0,x]\}$.Avem:

$$|f(t)|\leq A\int_0^{at}|f(u)|du+B\int_0^{bt} f(u)\,du\leq A\cdot M\cdot at+B\cdot M\cdot bt,(\forall)t\in[0,x];$$

$$|f(t)|\leq A\cdot\int_0^{at}|f(u)|du+B\int_0^{bt}|f(u)|du\leq A(AMa+BMb)\frac{(at)^2}{2}+B(AMa+BMb)\frac{(bt)^2}{2}$$

$=\frac{M(aA+bB)(a^2A+b^2B)}{2}t^2$, $(\forall)t\in[0,x]$.Prin inducție matematică se arată că:

$$|f(t)|\leq\frac{M(aA+bB)(a^2A+b^2B)\cdot\ldots\cdot(a^nA+b^nB)}{n!}t^n,(\forall)t\in[0,x]\text{şi }(\forall)n\in\mathrm{N}^*.$$

Dacă notăm $\alpha=\max(a,b)$ şi $k=\max(A,B)$, atunci

$$|f(t)|\leq\frac{M\cdot(2\alpha k)\cdot(2\alpha^2k)\cdot\ldots\cdot(2\alpha^nk)\,t^n}{n!}=\frac{M\cdot 2^n\alpha^{\frac{n(n+1)}{2}}t^n}{n!},(\forall)t\in[0,x]$$

$\Rightarrow|f(t)|\leq\frac{M\cdot 2^nt^n}{n!},(\forall)t\in[0,x]$. Cum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2x)^n}{n!}=0\Rightarrow|f(x)|\leq\lim_{n\to\infty}M\frac{(2x)^n}{n!}=0\Rightarrow f(x)=0,(\forall)x\geq 0.$$

Probleme propuse

1. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că există $a,b\in(0,1)$, astfel încât : $|f(x)|\leq\int_0^{ax}|f(t)|dt+\int_0^{bx}|f(t)|dt,(\forall)x\geq 0$. Arătați că $f(x)=0,(\forall)x\in[0,\infty]$.

2. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că există $a\in(0,1)$ astfel încât : $|f(x)|\leq\int_0^{ax}|f(t)|dt,(\forall)x\geq 0$ .Arătați că $f(x)=0,(\forall)x\geq 0$.

3. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că există $a,b,c\in(0,1)$ astfel încât $f(x)=\int_0^{ax} f(t)dt+\int_0^{bx} f(t)dt+\int_0^{cx} f(t)dt,(\forall)x\geq 0$. Arătați că $f(x)=0,(\forall)x\geq 0$.

4. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că există $A_1, A_2, \ldots, A_n > 0$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ astfel încât:
$\left|f(x)\right| \le A_1\int_0^{a_1x}\left|f(t)\right|dt + A_2\int_0^{a_2x}\left|f(t)\right|dt + \ldots + A_n\int_0^{a_nx}\left|f(x)\right|dt, (\forall)\, x \ge 0$. Arătați că $f(x)=0, (\forall) x \ge 0$.

17. Fie $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții continue pe $[a,b]$. Să se demonstreze că există $c\in(a,b)$ astfel încât: $g(c)\int_a^c f(x)dx + f(c)\int_b^c g(x)dx = 0$.

(O.J.,Mehedinți,1997)

Generalizare

Fie $f,g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă f,g sunt continue iar h este derivabilă, să se demonstreze că există $c\in(a,b)$ astfel încât:

$h(c)g(c)\int_a^c f(x)\,dx + h(c)f(c)\int_b^c g(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx\cdot\int_c^b g(x)\,dx\cdot h'(c)$.

Soluție

Considerăm funcția $F:[a,b]\to\mathbb{R}, F(t)=\int_a^t f(x)\,dx\cdot\int_b^t g(x)dx\cdot h(t)$. Observăm că $F(a)=F(b)=0$. Cum F este derivabilă pe $[a,b]$ folosind teorema lui Rolle deducem că există $c\in(a,b)$ astfel încât $F'(c)=0$. Deoarece $F'(t) = f(t)h(t)\int_b^t g(x)dx + g(t)h(t)\int_a^t f(x)dx - \int_a^t f(x)dx\cdot\int_t^b g(x)dx\cdot h'(t)$ se deduce relația din enunț.

Cazuri particulare

1 Fie funcțiile continue $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$. Să se demonstreze că există $c\in(a,b)$ astfel încât : $cg(c)\int_a^c f(x)dx + cf(c)\int_b^c g(x)dx = \int_a^c f(x)dx\cdot\int_c^b g(x)dx$.

2. Fie funcțiile continue $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$. Să se demonstreze că există $c\in(a,b)$ astfel încât: $g(c)\int_a^c f(x)dx + f(c)\int_b^c g(x)dx = \int_a^c f(x)dx\cdot\int_c^b g(x)dx$.

3. Fie funcțiile continue $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$. Să se demonstreze că există $c\in(a,b)$ astfel încât: $g(c)\int_a^c f(x)dx + f(c)\int_b^c g(x)dx = c\int_a^c f(x)dx\cdot\int_c^b g(x)dx$.

4. Fie funcțiile continue $f,g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu h derivabilă. Să se demonstreze că există $c\in(a,b)$ astfel încât :

$g(c)\int_a^c f(x)dx + f(c)\int_b^c g(x)dx = h'(c)\int_a^c f(x)dx\cdot\int_c^b g(x)dx$.

18. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și înjectivă cu proprietatea că $f(1)=1$. Demonstrați că dacă există $x_0\in(0,1)$ astfel încât $f(x_0)\ge 2$, atunci $\int_0^1 e^{f(x)}dx > 2$.

(O.J.,Mehedinți,1997)

Generalizare

Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi funcţiile continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ .Dacă g este crescătoare, f injectivă, $f(b)=\alpha$ şi există $x_0\in(a,b)$ astfel încât:

$f(x_0)\geq\beta>\alpha$,atunci :

a) $\int_a^b g(f(x))dx\geq bg(\alpha)-ag(\beta)+x_0(g(\beta)-g(\alpha))$

b) $\int_a^b g(f(x))dx\leq bg(f(x_0))-ag(f(a))+x_0(g(f(a))-g(f(x_0)))$.

Cazuri particulare

1.Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi injectivă cu proprietatea că $f(1)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=2,\ f(0)=3$. Demonstraţi că : $\frac{e(e+1)}{2}\leq\int_0^1 e^{f(x)}dx\leq\frac{e^2(e+1)}{2}$.

2.Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi injectivă cu proprietatea că $f(a)=\alpha,\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\beta,\ f(b)=\gamma,\alpha>\beta>\gamma$ .Arătaţi că :

$$\frac{b-a}{2}e^{\beta}+\frac{a+b}{2}e^{\gamma}\leq\int_a^b e^{f(x)}dx\leq\frac{b-a}{2}e^{\gamma}+\frac{a+b}{2}e^{\beta}.$$

3.Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi injectivă cu proprietatea că $f(0)=3,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=2,\ f(1)=1$.Demonstraţi că $\frac{\ln 2}{2}\leq\int_0^1\ln f(x)dx\leq\frac{\ln 6}{2}$.

4.Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi injectivă cu proprietatea că $f(a)=\alpha,\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\beta,\ f(b)=\gamma,\alpha>\beta>\gamma>0$ .Arătaţi că :

$$\frac{b-a}{2}\ln\beta+\frac{a+b}{2}\ln\gamma\leq\int_a^b\ln f(x)dx\leq\frac{b-a}{2}\ln\alpha+\frac{a+b}{2}\ln\beta.$$

5.Daţi exemple de funcţii pentru care inegalităţile din partea stângă ale exerciţiilor (1) şi (3) devin egalităţi. Aceeaşi cerinţă şi pentru inegalităţile din partea dreaptă.

19. Fie $f,g:[-a,a]\to\mathbb{R}\ (a\in\mathbb{R},a>0)$ două funcţii cu proprietăţile:

1) f derivabilă, g continuă pe $[-a,a]$;

2) f' şi g sunt pare.

Să se arate că: $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx=2f(0)\int_0^a g(x)dx$.

(O.J., Neamţ ,1997)

Generalizare

Fie $a>0,\alpha\geq 0$ şi funcţiile $f,g:[-a+\alpha,a+\alpha]\to\mathbb{R}$ ce satisfac condiţiile:

1) f derivabilă, g continuă pe $[-a+\alpha,a+\alpha]$;

2) $g(-x+\alpha)=g(x+\alpha),(\forall)x\in[0,a]$; 3) $f'(-x+\alpha)=f'(x+\alpha),(\forall)x\in[0,a]$.

Să se arate că : $\int_{-a+\alpha}^{a+\alpha} f(x)g(x)dx=2f(\alpha)\int_{\alpha}^{a+\alpha} g(x)dx$.

Soluție

Considerăm funcția: $h:[0,a]\to\mathbb{R}, h(t)=\int_{-t+\alpha}^{t+\alpha} f(x)g(x)dx-2f(\alpha)\int_{\alpha}^{t+\alpha} g(x)dx$. Funcția h este derivabilă şi

$$h'(t)=f(t+\alpha)g(t+\alpha)+f(-t+\alpha)g(-t+\alpha)-2f(\alpha)g(t+\alpha)=$$
$$=f(t+\alpha)g(t+\alpha)+f(-t+\alpha)g(t+\alpha)-2f(\alpha)g(t+\alpha)=$$
$$=g(t+\alpha)\left[f(t+\alpha)+f(-t+\alpha)-2f(\alpha)\right].$$

Fie $p(t)=f(t+\alpha)-f(-t+\alpha)-2f(\alpha)$.Avem

$$p'(t)=f'(t+\alpha)-f'(-t+\alpha)=0,(\forall)t\in[0,a]\Rightarrow p(t)=p(0)=0,(\forall)t\in[0,a]\Rightarrow$$
$$h'(t)=0,(\forall)t\in[0,a]\Rightarrow h(t)=h(0)=0,(\forall)t\in[0,a]\Rightarrow h(a)=0$$

20. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f\in\int e^x g(x)dx$ şi $g\in\int e^x f(x)dx$. Să se determine f şi g ştiind că $f(0)=e$ şi $g(0)=0$.

(***O.L,Bucureşti , 2000, M. Andronache***)

Generalizare:

Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f\in\int h(x)g(x)dx$ şi $g\in\int h(x)f(x)dx$. Să se determine f şi g ştiind că $f(0)=a$, $g(0)=b$ şi h este continuă.

Soluție:

$f\in\int h(x)g(x)dx\Leftrightarrow f$ este derivabilă şi $f'=hg$ (1)

$g\in\int h(x)f(x)dx\Leftrightarrow g$ este derivabilă şi $g'=hf$ (2)

Din (1) şi (2) deducem că $p'=hp$ şi $q'=-hq$, unde $p=f+g$ şi $q=f-g$. Relația $p'=hp$ se poate scrie $\left(pe^{-H}\right)'=0$, unde H este o primitivă a lui $h\Rightarrow(\exists)k_1\in\mathbb{R}$ astfel încât

$pe^{H}=k_1\Leftrightarrow p=e^{H}k_1$. Analog relația $q'=-hq$ se scrie $\left(qe^{H}\right)'=0\Leftrightarrow(\exists)k_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $qe^{-H}=k_2\Leftrightarrow q=e^{-H}k_2$. Cum $f(0)=a$ şi $g(0)=b\Rightarrow p(0)=a+b$ şi

$q(0)=a-b\Rightarrow p=f+g=e^{H}\dfrac{a+b}{e^{H(0)}}$ şi

$q=f-g=\dfrac{(a-b)e^{H(0)}}{e^{H}}\Rightarrow\quad f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(a+b)e^{H(x)}}{e^{H(0)}}+\dfrac{(a-b)e^{H(0)}}{e^{H(x)}}\right)$ şi

$g(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(a+b)e^{H(x)}}{e^{H(0)}}-\dfrac{(a-b)e^{H(0)}}{e^{H(x)}}\right)$.

Cazuri particulare:

1. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f\in\int x^2g(x)dx$ şi $g\in\int x^2f(x)dx$. Să se determine f şi g ştiind că $f(0)=e$ şi $g(0)=0$.

2. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f\in\int e^{-x}g(x)dx$ şi $g\in\int e^{-x}f(x)dx$. Să se determine f şi g ştiind că $f(0)=e^2$ şi $g(0)=0$.

3. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f\in\int\dfrac{g(x)}{1+x^2}dx$ şi $g\in\int\dfrac{f(x)}{1+x^2}dx$. Să se determine f şi g ştiind că $f(0)=e$ şi $g(0)=0$.

21. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă pe $\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)+f(-x)=x,(\forall)x\in\mathbb{R}$. Calculați $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\cos^2 x}dx$.

(***O.L., Vaslui, 2001***)

Generalizare:

Fie $\alpha,\beta,\gamma,a,b\in\mathbb{R},a<b$ şi funcțiile $f,g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, astfel încât $\alpha f(x)+\beta f(a+b-x)=h(x),(\forall)x\in[a,b]$ şi $\gamma g(x)=g(a+b-x)$, $(\forall)x\in[a,b],\alpha\gamma+\beta\neq 0$. Arătați că $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\beta}\int_a^b h(x)g(x)dx$.

Soluție:

Folosim egalitatea $\int_a^b u(x)dx=\int_a^b u(a+b-x)dx,(\forall)u:[a,b]\to\mathbb{R}$, o funcție integrabilă pe $[a,b]$.

Obținem: $I=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)g(a+b-x)dx=\gamma\int_a^b f(a+b-x)g(x)dx$

$$I=\frac{\alpha I+\frac{\beta I}{\gamma}}{\alpha+\frac{\beta}{\gamma}}=\frac{\int_a^b\left(\alpha f(x)+\beta f(a+b-x)\right)g(x)dx}{\alpha+\frac{\beta}{\gamma}}=\frac{\int_a^b h(x)g(x)dx}{\alpha+\frac{\beta}{\gamma}}.$$

Cazuri particulare:

1. Calculați $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\sin^2 x+1}dx$, unde $f:\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă astfel încât $f(x)+f(-x)=x,(\forall)x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

2. Calculați $\int_{-1}^{1}x^{2n+1}\ln\left(ae^x+b\right)\left(be^x+a\right)dx$ unde $n\in\mathbb{N}$ şi $a,b>0$.

3. Calculați $\int_{-1}^{1}x^{2n+1}\ln\frac{\left(ae^x+b\right)\left(be^x+a\right)}{\left(ce^{2x}+d\right)\left(de^{2x}+c\right)}dx$ unde $n\in\mathbb{N}$ şi $a,b,c,d>0$.

22. Să se demonstreze că nu există o funcție continuă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ strict crescătoare astfel încât $\int_0^1 f(x)dx=0$ şi $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx=0$.

(***O.L., Vaslui, 1997***)

Generalizare:

Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi descrescătoare. Să se demonstreze că nu există o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă şi strict crescătoare astfel încât $\int_a^b f(x)dx=0$ şi $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$.

Soluție: Presupunem că există funcții. Folosind teorema de medie deducem că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=0$ şi cum f este strict crescătoare $\Rightarrow f(x)<0,(\forall)x\in[a,c)$ şi $f(x)>0,(\forall)x\in(c,b]$. Dacă $x\in[a,c]$ atunci $f(x)g(x)\leq f(x)g(c)$,iar dacă $x\in[c,b]$ atunci $f(x)g(x)\leq f(x)g(c)\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)g(x)dx<g(c)\int_a^b f(x)dx=0\Rightarrow\int_a^b f(x)g(x)dx<$ ceea ce contrazice ipoteza.

Cazuri particulare:

1. Să se arate că nu există funcții continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ strict crescătoare astfel încât $\int_0^1 f(x)dx=0$ şi $\int_a^b\frac{f(x)}{1+e^x}dx\geq 0$.

2. Să se arate că nu există funcții continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ strict crescătoare astfel încât $\int_0^1 f(x)dx=0$ și $\int_a^b f(x)e^x dx\geq 0$.

23. Fie $a\in\mathbb{R}^*, a$ fixat. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue pentru care: $x\int_0^a f(t)dt=a\int_0^x f(t)dt,(\forall)x\in\mathbb{Q}$.

(***O.L., Mehedinți, 2003***)

Generalizare:

Fie $a\in\mathbb{R}^*, a$ fixat și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă și $g(a)\neq 0, g(0)=0$. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue pentru care: $g(x)\int_0^a f(t)dt=g(a)\int_0^x f(t)dt,(\forall)x\in\mathbb{Q}$.

Soluție:

Fie $x\in\mathbb{R}$ și $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere raționale ce converge la x

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)\int_0^a f(t)dt=\lim\limits_{n\to\infty} g(a)\int_0^{x_n} f(t)dt \Rightarrow g(x)\int_0^a f(t)dt=g(a)\int_0^x f(t)dt,(\forall)x\in\mathbb{R}$ Prin derivare obținem: $g'(x)\int_0^a f(t)dt=g(a)f(x),$

$(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=\dfrac{g'(x)}{g(a)}\int_0^a f(t)dt,(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow(\exists)k\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=kg'(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$. Se observă că funcția găsită satisface condiția din enunț.

Cazuri particulare:

1. Fie $a\in\mathbb{R}^*, a$ fixat. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue pentru care: $x^2\int_0^a f(t)dt=a^2\int_0^x f(t)dt,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

2. Fie $a\in\mathbb{R}^*, a$ fixat $n\in\mathbb{N}^*$. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue pentru care: $x^n\int_0^a f(t)dt=a^n\int_0^x f(t)dt,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

24. Fie $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ continuă. Demonstrați că

$$\frac{1}{2(x+1)}\int_{x^2}^{(x+1)^2} f(t)dt\leq\int_x^{x+1} f(t^2)dt\leq\frac{1}{2x}\int_{x^2}^{(x+1)^2} f(t)dt,(\forall)x\in(0,\infty).$$

(***O.L., Dâmbovița***)

Generalizare:

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă, strict pozitivă și crescătoare. Arătați că pentru o funcție continuă $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{\varphi'(x+1)}\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x+1)} f(t)dt\leq\int_x^{x+1} f(\varphi(t))dt\leq\frac{1}{\varphi'(x)}\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x+1)} f(t)dt,(\forall)x\in(0,\infty).$$

Soluție:

Cu schimbarea de variabilă $t=\varphi(u)$ obținem $\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x+1)} f(t)dt=\int_x^{x+1}\varphi'(u)f(\varphi(u))du$. Inegalitatea de demonstrat devine: $\int_x^{x+1}\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi'(x+1)}f(\varphi(t))dt\leq\int_x^{x+1} f(\varphi(t))dt\leq\int_x^{x+1}\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi'(x)}f(\varphi(t))dt$ care este o inegalitate adevărată deoarece $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi'(x+1)}f(\varphi(t))\leq f(\varphi(t))\leq\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi'(x)}f(\varphi(t)),(\forall)t\in[x,x+1]$.

Cazuri particulare:

1. Fie $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ o funcție continuă. Arătați că are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{3(x+1)^2}\int_{x^3}^{(x+1)^3} f(t)dt \le \int_x^{x+1} f\left(t^3\right)dt \le \frac{1}{3x^2}\int_{x^3}^{(x+1)^3} f(t)dt, (\forall)x\in(0,\infty).$$

2. Fie $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ o funcție continuă. Arătați că are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{e^{x+1}}\int_{e^x}^{e^{x+1}} f(t)dt \le \int_x^{x+1} f\left(e^t\right)dt \le \frac{1}{e^x}\int_{e^x}^{e^{x+1}} f(t)dt, (\forall)x\in(0,\infty).$$

25. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și $(a_n)_{n\ge1}\subset[0,1]$ un șir cu limita λ. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(a_n x)dx = \begin{cases}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)dt, \lambda\ne 0\\ f(0), \lambda=0\end{cases}.$$

(***O.L., Olt, 2007, Florian Dumitrel***)

Generalizare:

Fie $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ și $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții continue și $(a_n)_{n\ge1},(b_n)_{n\ge1}\subset[0,1]$ două șiruri convergente la limita λ. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\left(xa_n+(1-a_n)a\right)g\left(xb_n+(1-b_n)a\right)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}\int_a^{a+\lambda(b-a)} f(x)g(x)dx, \text{ dacă } \lambda\ne0\\ (b-a)f(a)g(a), \text{ dacă } \lambda=0\end{cases}$$

Soluție: Notăm $\varphi_n(x)=f\left(xa_n+(1-a_n)a\right)g\left(xb_n+(1-b_n)a\right)$ și $\varphi(x)=f\left(x\lambda+(1-\lambda)a\right)g\left(x\lambda+(1-\lambda)a\right)$.

Cum f este continuă pe $[a,b]\Rightarrow$ că f este uniform continuă pe $[a,b]\Rightarrow(\forall)\varepsilon>0(\exists)\delta_\varepsilon'>0$ astfel încât $|f(u)-f(v)|<\varepsilon,(\forall)u,v\in[a,b]$ cu $|u-v|<\delta_\varepsilon'$. Analog avem: $(\forall)\varepsilon>0,(\exists)\delta_\varepsilon''>0$ astfel încât $|g(u)-g(v)|<\varepsilon,(\forall)u,v\in[a,b]$ cu $|u-v|<\delta_\varepsilon''$. Fie $M_1=\max_{x\in[a,b]} f(x)$ și $M_2=\max_{x\in[a,b]} g(x)\Rightarrow|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\le\left|f\left(xa_n+(1-a_n)a\right)-f\left(x\lambda+(1-\lambda)a\right)\right|\cdot$
$\left|g\left(xb_n+(1-b_n)a\right)\right|+\left|g\left(xb_n+(1-b_n)a\right)-g\left(x\lambda+(1-\lambda)a\right)\right|\left|f\left(x\lambda+(1-\lambda)a\right)\right|\le$
$\varepsilon M_2+\varepsilon M_1$. Aceasta rezultă din următoarele:

Cum $a_n\to\lambda, b_n\to\lambda\Rightarrow(\exists)n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel încât $|a_n-\lambda|,|b_n-\lambda|<\frac{\delta_\varepsilon}{M+|a|}$,

$(\forall)n\ge n_0(\varepsilon)$; $M=\max_{x\in[a,b]}|x|$ și $\delta_\varepsilon=\min\left(\delta_\varepsilon',\delta_\varepsilon''\right)$.

$$\left|xa_n+(1-a_n)a-x\lambda-(1-\lambda)a\right|\le|x||a_n-\lambda|+|a||a_n-\lambda|<\delta_\varepsilon$$

$$\left|xb_n+(1-b_n)a-x\lambda-(1-\lambda)a\right|\le(|x|+|a|)|b_n-\lambda|<\delta_\varepsilon.$$

$$-\varepsilon(M_1+M_2)+\varphi(x)\le\varphi_n(x)\le\varphi(x)+\varepsilon(M_1+M_2),(\forall)x\in[a,b],(\forall)n>\delta_0(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow\int_a^b\varphi(x)dx-\varepsilon(M_1+M_2)(b-a)\le\int_a^b\varphi_n(x)\le\int_a^b\varphi(x)dx+\varepsilon(M_1+M_2)(b-a)\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)=\int_a^b\varphi(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}\int_a^{a+\lambda(b-a)} f(x)g(x)dx, \text{ dacă } \lambda\ne0\\ (b-a)f(a)g(a), \text{ dacă } \lambda=0\end{cases}$$

26. Se consideră șirul: $a_n(p)=1-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{3p+1}+...+(-1)^n\frac{1}{np+1}, n\in\mathbb{N}^*, p\in(0,\infty)$.

a) Arătați că: $\lim_{n\to\infty}a_n(p)=\int_0^1\frac{1}{1+x^p}dx$.

b) Arătați că: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+...+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$.

Generalizare:

Se consideră şirul: $a_n(p,q)=$

$$\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+q+1}+\frac{1}{2p+q+1}-\frac{1}{3p+q+1}+...+(-1)^n\frac{1}{np+q+1},\ p,q\in(0,\infty)$$

a) Arătați că: $\lim_{n\to\infty}a_n(p,q)=\int_0^1\frac{x^q}{1+x^p}dx$.

b) Arătați că pentru orice $q\geq 1$ avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q(q+1)}-\frac{1}{(2+q)(3+q)}+\frac{1}{(4+q)(5+q)}+...+(-1)^n\frac{1}{(2n+q)(2n+q+1)}\right)=$$
$$\int_0^1\frac{x^{q-1}-x^q}{1+x^2}dx$$

Soluție:

a) Avem $1+x+...+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1},(\forall)x\neq 1$. Înlocuind x cu $-x^p$ obținem:

$$1-x^p+...+(-1)^n x^{np}=\frac{1+(-1)^n x^{np+p}}{1+x^p},(\forall)x\geq 0\Rightarrow x^q-x^{p+q}+...+(-1)^n x^{np+q}=$$
$$\frac{x^q+(-1)^n x^{np+p+q}}{1+x^p},(\forall)x\geq 0\Rightarrow\int_0^1\left(x^q-x^{p+q}+...+(-1)^n x^{np+q}\right)dx=$$
$$=\int_0^1\frac{x^q}{1+x^p}dx+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{np+p+q}}{1+x^p}dx\Rightarrow a_n(p,q)=\int_0^1\frac{x^q}{1+x^p}dx+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{np+p+q}}{1+x^p}dx,\text{ cum}$$

$0\leq\int_0^1\frac{x^{np+p+q}}{1+x^p}dx\leq\int_0^1 x^{np+p+q}dx=\frac{1}{np+p+q+1},(\forall)n\in\mathbb{N}$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{np+p+q}=0$ din teorema "cleştelui" obținem că:

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{np+p+q}}{1+x^p}dx=0$, deci $\lim_{n\to\infty}a_n(p,q)=\int_0^1\frac{x^q}{1+x^p}dx$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q(q+1)}-\frac{1}{(2+q)(3+q)}+...+(-1)^n\frac{1}{(2n+q)(2n+q+1)}\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+q)(2k+q+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+q}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+q+1}\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n(2,q-1)-a_n(2,q)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\frac{x^{q-1}}{1+x^2}dx-\int_0^1\frac{x^q}{1+x^2}dx\right)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{q-1}-x^q}{1+x^2}dx$$

Cazuri particulare:

1. Calculați: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{(-1)^n}{2n+3}\right)$.

2. Calculați: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+...+\frac{(-1)^n}{3n+1}\right)$.

3. Calculați: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{5\cdot 6}+...+\frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+4)}\right)$.

27. Fie $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$,derivabilă cu $f'(x)(1-f(x)) \le 0, (\forall) x \in \mathbb{R}_+^*$ şi $f(0)=1$. Arătaţi că $\ln f(x) \le f(x)-1, (\forall) x \in \mathbb{R}_+$.

(***Concursul "Ion Barbu", 2006***)

Generalizare:

Fie $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$,derivabilă cu $f'(x)\left(a-bf^n(x)\right) \le 0, (\forall) x \in \mathbb{R}_+^*$ şi $f(0)=\frac{a}{b}$, unde $a,b>0$. Atunci avem: $\ln\left(\frac{b}{a}f(x)\right) \le \frac{b}{na}\left(f^n(x)-\frac{a^n}{b^n}\right), (\forall) x \ge 0$.

Soluție:

Cum $f(x)>0, (\forall) x \ge 0$, atunci relația dată în enunț se poate scrie:

$$a\frac{f'(x)}{f(x)} \le bf'(x)f^{n-1}(x), (\forall) x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \int_0^x a\frac{f'(t)}{f(t)}dt \le \int_0^x bf'(t)f^{n-1}(t)dt, (\forall) x \ge 0$$

$$\Rightarrow a\ln f(x) - a\ln f(0) \le \frac{bf^n(x)-bf^n(0)}{n}, (\forall) x \ge 0 \Leftrightarrow a\ln f(x) \le -a\ln\frac{a}{b} \le$$

$$\frac{bf^n(x)-b\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}, (\forall) x \ge 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{b}{a}f(x)\right) \le \frac{b}{na}\left(f^n(x)-\frac{a^n}{b^n}\right), (\forall) x \ge 0.$$

Cazuri particulare:

1. Fie $f:[0,\infty) \to (0,\infty)$ derivabilă cu $f'(x)\left(1-f^2(x)\right) \le 0, (\forall) x>0$ şi $f(0)=1$. Arătaţi că $\ln f(x) \le \frac{1}{2}\left(f^2(x)-1\right), (\forall) x \ge 0$.

2. Fie $f:[0,\infty) \to (0,\infty)$ derivabilă cu $f'(x)\left(1-f^3(x)\right) \le 0, (\forall) x \in \mathbb{R}_+^*$ şi $f(0)=1$. Arătaţi că $\ln f(x) \le \frac{1}{3}\left(f^3(x)-1\right), (\forall) x \ge 0$.

3. Fie $f:[0,\infty) \to (0,\infty)$ derivabilă cu $f'(x)\left(a-f(x)\right) \le 0, (\forall) x>0$ şi $f(0)=a$, unde $a>0$. Atunci avem: $\ln\left(\frac{f(x)}{a}\right) \le \frac{1}{a}\left(f(x)-a\right), (\forall) x \ge 0$.

28. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+2007}}dx$.

(***Concursul "Ion Ciolac", 2007, Liliana Niculescu***)

Generalizare:

Fie $r \in \mathbb{N}^*$ şi $k_1,k_2,\ldots,k_r \in \mathbb{N}$ cu $k_1,k_2,\ldots,k_r \ge 2$. Dacă $a_1,a_2,\ldots,a_r \in (0,\infty)$, calculați

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[k_1]{x^{k_1}+a_1}+\sqrt[k_2]{x^{k_2}+a_2}+\ldots+\sqrt[k_r]{x^{k_r}+a_r}}dx.$$

Soluție:

Se observă că pentru orice $x \in (0,1)$ avem:

$$\sqrt[k_1]{x^{k_1}+a_1}+\sqrt[k_2]{x^{k_2}+a_2}+\ldots+\sqrt[k_r]{x^{k_r}+a_r} > \sqrt[k_1]{x^{k_1}}+\sqrt[k_2]{x^{k_2}}+\ldots+\sqrt[k_r]{x^{k_r}} = rx \Rightarrow$$

$$0 \le n\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[k_1]{x^{k_1}+a_1}+\sqrt[k_2]{x^{k_2}+a_2}+\ldots+\sqrt[k_r]{x^{k_r}+a_r}}dx \le n\int_0^1 \frac{x^n}{rx}dx = \frac{1}{r}\int_0^1 \left(x^n\right)' dx = \frac{1}{rn}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$ Cum

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{rn}=0$ din "teorema cleştelui" deducem că limita din enunț este 0.

Cazuri particulare şi probleme asemănătoare:

1. Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}}dx$.

2. Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{2\sqrt{x^2+2}+3\sqrt[3]{x^3+3}}dx$.

3. Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx$.

4. Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n+x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+2}}dx$.