CREAȚII MATEMATICE SERIA B
ARTICOLE ŞI STUDII ŞTIINȚIFICE

ISSN online 2246-9451

Generalizări ale unor probleme din revista "Sinus"

de Ion Bursuc şi Daniela Macovei

Motto: A dat apoi Domnul Dumnezeu lui Adam poruncă şi a zis: "Din toți pomii din rai poți să mănânci,Iar din pomul cunoştinței binelui şi răului să nu mănânci, căci, în ziua în care vei mânca din el, vei muri negreşit!
(Facerea,cap.2,v.16,17)

1. Fie $x, y, z \in [1, \infty)$. Să se determine maximul expresiei:

$E(x,y,z)=\dfrac{x\sqrt{y-1}+y\sqrt{z-1}+z\sqrt{x-1}}{xy+yz+zx}$ şi valorile x, y, z pentru care este atins acest maxim.

Dumitru Crăciun, Sinus nr. 3/2009

Generalizare:

Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 2, p,q\in\mathbb{R}^*$, şi $x,y,z\in[n-1,\infty)$. să se determine maximul expresiei

$E(x,y,z)=\dfrac{x^p\sqrt[n]{(y-n+1)^q}+y^p\sqrt[n]{(z-n+1)^q}+z^p\sqrt[n]{(x-n+1)^q}}{x^py^q+y^pz^q+z^px^q}$ şi valorile x, y, z pentru care este atins acest maxim.

Soluție:

Folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică obținem:

$\sqrt[n]{x-n+1}=\sqrt[n]{(x-n+1)\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}\leq\dfrac{(x-n+1)+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\,de\,1}}{n}=\dfrac{x}{n}$ **(1),** cu egalitate dacă şi numai dacă $x=n$. Analog avem $\sqrt[n]{y-n+1}\leq\dfrac{y}{n}$, **(2),** $\sqrt[n]{z-n+1}\leq\dfrac{z}{n}$ **(3).** Din inegalitățile **(1), (2),** şi **(3)** obținem: $E(x,y,z)\leq\dfrac{x^p\left(\frac{y}{n}\right)^q+y^p\left(\frac{z}{n}\right)^q+z^p\left(\frac{x}{n}\right)^q}{x^py^q+y^pz^q+z^px^q}=\dfrac{1}{n^q}\Rightarrow\max E(x,y,z)=\dfrac{1}{n^q}$ şi se atinge pentru $x=y=z=n.$

Cazuri particulare şi probleme asemănătoare:

1. Fie $x,y,z\in[1,\infty)$. Să se determine maximul expresiei

$E(x,y,z)=\dfrac{x^2\sqrt{y-1}+y^2\sqrt{z-1}+z^2\sqrt{x-1}}{x^2y+y^2z+z^2x}$ şi valorile x, y, z pentru care aste atins acest maxim.

2. Fie $x,y,z\in[1,\infty)$. Să se determine maximul expresiei

$E(x,y,z)=\dfrac{yz\sqrt{y-1}+xz\sqrt{z-1}+xy\sqrt{x-1}}{y^2z+z^2x+x^2y}$, şi valorile x, y, z pentru care este atins acest maxim.

3. Fie $x,y,z\in[2,\infty)$. Să se determine maximul expresiei

$$E(x,y,z)=\frac{x\sqrt[3]{y-2}+y\sqrt[3]{z-2}+z\sqrt[3]{x-2}}{xy+yz+zx},$$ şi valorile x,y,z pentru care este atins acest maxim.

4. Fie $x,y,z\in[3,\infty)$. Să se determine maximul expresiei

$$E(x,y,z)=\frac{x\sqrt[4]{y-3}+y\sqrt[4]{z-3}+z\sqrt[4]{x-3}}{xy+yz+zx},$$ şi valorile x,y,z pentru care este atins acest maxim.

5. Fie $x,y,z\in[2,\infty)$. Să se determine maximul expresiei

$$E(x,y,z)=\frac{x(y-2)+y(z-2)+z(x-2)}{xy^3+yz^3+zx^3},$$ şi valorile x,y,z pentru care este atins acest maxim.

6. Fie $x,y,z\in[1,\infty)$. Să se determine maximul expresiei

$$E(x,y,z)=\frac{x(y-1)+y(z-1)+z(x-1)}{xy^2+yz^2+zx^2},$$ şi valorile x,y,z pentru care este atins acest maxim.

7. Fie $x,y,z\in[1,\infty)$. Să se determine maximul expresiei

$$E(x,y,z)=\frac{x^2y^2z^2\left[x(z-1)(x-1)+y(x-1)(y-1)+z(y-1)(z-1)\right]}{\left(x^3z^2+y^3x^2+z^3y^2\right)(x-1)(y-1)(z-1)}.$$

2. Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A+B=I_n$ şi $A^{2008}=A^{2009}$, atunci matricea $I_n-A^{2007}\cdot B\in M_n(\mathbb{R})$ este inversabilă.

D. M. Bătinețu – Giurgiu, Sinus nr. 3/2009

Generalizare:

Fie $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi $r,s\in\mathbb{N}^*$. Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $\alpha A^s+\beta B=I_n$ şi $\alpha A^{r+s}=A^r$, atunci matricea $I_n-A^pB^q$ cu $p,q\in\mathbb{N}^*, p>\left[\frac{r}{2}\right]$ este inversabilă.

Soluție:

Din relația $\alpha A^s+\beta B=I_n\Rightarrow\alpha A^{s+1}+\beta AB=A$ şi $\alpha A^{s+1}+\beta BA=A$, de unde deducem că $AB=BA$ şi deci $A^uB^v=B^vA^u, (\forall)u,v\in\mathbb{N}^*$. Pe de altă parte, se observă că

$\beta A^rB=A^r(I_n-\alpha A^s)=A^r-\alpha A^{r+s}=O_n\Rightarrow A^rB=O_n\Rightarrow$

$\Rightarrow(I_n-A^pB^q)(I_n+A^pB^q)=I_n-A^{2p}B^{2q}=I_n\Rightarrow I_n-A^pB^q$ este inversabilă.

Cazuri particulare şi probleme asemănătoare:

1. Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{R}),(n\geq 2)$ astfel încât $A+B=I_n$ şi există $r\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^{r+1}=A^r$, atunci matricea I_n-A^rB este inversabilă.

2. Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{R}),(n\geq 2)$ astfel încât $A^2+B=I_n$ şi există $r\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^{r+2}=A^r$, atunci matricea I_n-A^rB este inversabilă.

3. Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{R}),(n\geq 2)$ astfel încât $A^3+B=I_n$ şi există $r\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^{r+3}=A^r$, atunci matricea I_n-A^rB este inversabilă.

4. Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{R}),(n\geq 2)$ astfel încât $\alpha A+\beta B=I_n,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*,\alpha A^{r+1}=A^r$,

$r \in \mathbb{N}^*$, atunci matricea $I_n - A^p B$ este inversabilă pentru orice $p \in \mathbb{N}$ cu $p > \left[\frac{r}{2}\right]$.

5. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R}), (n \geq 2)$ astfel încât există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ cu $\alpha A^2 + \beta B = I_n$, $\alpha A^{r+2} = A^r, r \in \mathbb{N}^*$, atunci matricea $I_n - A^p B$ este inversabilă pentru orice $p \in \mathbb{N}$ cu $p > \left[\frac{r}{2}\right]$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\sqrt{1-x^2} + mx| \leq 1, (\forall) x \in [-1,1]$.

Dumitru Crăciun, Sinus nr 3/2009

Generalizare:

Fie $k \in (0, \infty)$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$ astfel încât $|a\sqrt{k^2 - x^2} + bx| \leq 1, (\forall) x \in [-k, k]$.

Soluție:

Dacă avem $|a\sqrt{k^2 - x^2} + bx| \leq 1, (\forall) x \in [-k, k]$, atunci pentru $x = \frac{kb \cdot \operatorname{sign} a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-k, k]$,obținem

$$1 \geq \left|a\sqrt{k^2 - x^2} + bx\right| = \left|a\sqrt{k^2 - \frac{k^2 b^2}{a^2 + b^2}} + \frac{kb^2 \cdot \operatorname{sign} a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{ka^2 + kb^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = k\sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow a^2 + b^2 \leq \frac{1}{k^2}.$$

Reciproc: dacă $a^2 + b^2 \leq \frac{1}{k^2}$, atunci folosind inegalitatea lui Cauchy – Schwarz obținem:

$$\left|a\sqrt{k^2 - x^2} + bx\right| \leq \sqrt{\left(a^2 + b^2\right)\left(\left(\sqrt{k^2 - x^2}\right)^2 + x^2\right)} = k\sqrt{a^2 + b^2} \leq 1, (\forall) x \in [-k, k].$$ Deci condiția necesară și suficientă ca numerele $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$ să satisfacă relația din enunț este $a^2 + b^2 \leq \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow (\exists) \alpha \in [0, 2\pi)$ și $\beta \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$ astfel încât $a = \beta \cos \alpha$, și $b = \beta \sin \alpha$.

Cazuri particulare și probleme asemănătoare:

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\sqrt{4 - x^2} + mx| \leq 1, (\forall) x \in [-2, 2]$.

2. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $|a\sqrt{1 - x^2} + bx| \leq 1, (\forall) x \in [-1, 1]$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $|m\sqrt{1 - x^2} + x| \leq 1, (\forall) x \in [-1, 1]$.

4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $|2\sqrt{4 - x^2} + mx| \leq 1, (\forall) x \in [-2, 2]$.

4. Să se arate că are loc inegalitatea $\lg^2 3 > 0{,}75 \lg 2$.

Gheorghe Marchitan, Sinus nr 3/2009

Generalizare:

Fie $a, n \in (1, \infty)$ astfel încât $a > n > \frac{a+1}{2}$. Arătați că $\log_a{}^2 n > \log_a(2n - a)$.

Soluție:

Inegalitatea din enunț se scrie: $\frac{\log_a n}{\log_a\left(n - (a - n)\right)} > \frac{\log_a(n + a - n)}{\log_a n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a{}^2 n \geq \log_a(n - \alpha) \cdot \log_a(n + \alpha)$, unde $\alpha = a - n > 0$.

Folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică obținem:

$$\log_a(n-\alpha)\cdot\log_a(n+\alpha)\le\left(\frac{\log_a(n-\alpha)+\log_a(n+\alpha)}{2}\right)^2=\left(\frac{\log_a\left(n^2-\alpha^2\right)}{2}\right)^2\le$$

$$\le\left(\frac{\log_a n^2}{2}\right)^2=\log_a{}^2 n.$$

Cazuri particulare şi probleme asemănătoare:

1. Să se arate că $\log_a{}^2(a-1)>\log_a(a-2),(\forall)a>3.$

2. Să se arate că $\lg^2 n>\lg(2n-10),(\forall)n\in(5,5;10).$

3. Să se arate că $\log_a(n^\alpha\cdot m^\beta)>2\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt[4]{\log_a(2n-a)\cdot\log_a(2m-a)},(\forall)a,n,m\in(1,\infty),$ cu $n,m\in\left(\frac{a+1}{2},a\right)$ şi $\alpha,\beta>0.$

5. Fie $\alpha,z\in\mathbb{C}$ astfel încât $z^3=\alpha(1+z).$ Să se arate că $|z|<1+|\alpha|.$

Dumitru Crăciun, Sinus nr 3/2009

Generalizare:

Fie $a\in(0,\infty)$ şi $\alpha,z,A,B\in\mathbb{C}$ cu $A,B,C\ne0$ astfel încât $z^3=\alpha(A+Bz).$ Să se arate că $|z|<a+\frac{|A|+a|B|}{4a^2}|\alpha|.$

Soluție:

Din relația $z^3=\alpha(A+Bz)$ deducem că $|z|^3=|\alpha|\cdot|A+Bz|\le|\alpha|(|A|+|B|\cdot|z|)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow|z|\left(|z|^2-|\alpha||B|\right)\le|\alpha||A|.$ **[1]** Dacă presupunem că inegalitatea din enunț nu are loc, atunci dacă notăm $b=\frac{|A|+a|B|}{4a^2}$ avem $|z|\left(|z|^2-|\alpha|\cdot|B|\right)\ge$

$$\ge(a+b|\alpha|)\left(a^2+2ab|\alpha|+b^2|\alpha|^2-|\alpha||B|\right)\ge(a+b|\alpha|)(2ab|\alpha|+2ab|\alpha|-|B||\alpha|)=$$

$$=(a+b|\alpha|)(4ab-|B|)|\alpha|>\left(4a^2b-a|B|\right)|\alpha|=|A||\alpha|\Rightarrow|z|\left(|z|^2-|\alpha||B|\right)>|A||\alpha|$$ ceea ce este în contradicție cu relația **[1].**

Cazuri particulare şi probleme asemănătoare:

1. Fie $\alpha,z\in\mathbb{C}$ şi $a\in\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8},1\right]$ astfel încât $z^3=\alpha(1+z).$ Să se arate că $|z|<a+\frac{1+a}{4a^2}|\alpha|\le1+|\alpha|$

2. Fie $\alpha,z\in\mathbb{C}$ astfel încât $z^3=\alpha(1+z).$ Să se arate că $|z|<\frac{1+\sqrt{17}}{8}+|\alpha|.$

3. Fie $\alpha,z,A\in\mathbb{C}$ astfel încât $|A|>1$ şi $z^3=4\alpha\left(A+(|A|-1)z\right).$ Să se arate că $|z|\le|A|+|\alpha|.$

4. Fie $\alpha,z\in\mathbb{C}$ astfel încât $z^3=4\alpha(2+z).$ Să se arate că $|z|\le2+|\alpha|.$

Bibliografie

Revista **Sinus nr 3/2009**