CREAŢII MATEMATICE SERIA B
ARTICOLE ŞI STUDII ŞTIINŢIFICE

ISSN online 2246-9451

Generalizări ale unor criterii de convergenţă pentru şiruri

de **Ion Bursuc**

Motto: Şi a zis Dumnezeu: "Să facem om după chipul şi după asemănarea Noastră, ca să stăpânească peştii mării, păsările cerului, animalele domestice, toate vietăţile ce se târăsc pe pământ şi tot pământul!" Şi a făcut Dumnezeu pe om după chipul Său; după chipul lui Dumnezeu l-a făcut; a făcut bărbat şi femeie.
(Facerea,cap.1,v.26,27)

În multe culegeri şi reviste de matematică se cere studiul convergenţei şi chiar calculul limitei unor şiruri, cum ar fi :

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n},$$

$$b_n = \frac{2\cdot 7\cdot 12\cdot \ldots \cdot (2+5(n-1))}{3\cdot 8\cdot 13\cdot \ldots \cdot (3+5(n-1))},\ c_n = \frac{2\cdot 3\cdot 6\cdot \ldots \cdot (n^2+2)}{1\cdot 2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n^2+1)}.$$

De cele mai multe ori se foloseşte teorema şirurilor încadrate, dar inegalităţile necesare folosirii acestei teoreme sunt destul de greu de obţinut sau se folosesc unele criterii de convergenţă. Sunt cunoscute următoarele criterii de convergenţă pentru şiruri :

Teoremă: Fie (a_n) un şir de numere reale pozitive. Atunci au loc implicaţiile :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, \text{dacă } l<1 \\ +\infty, \text{dacă } l>1 \end{cases}$ (criteriul raportului)

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, \text{dacă } L<1 \\ +\infty, \text{dacă } L>1 \end{cases}$ (criteriul radicalului)

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, \text{dacă } \alpha>0 \\ \infty, \text{dacă } \alpha<0 \end{cases}$

(A se vedea[1])

Se observă că fiecare dintre aceste criterii ne permite să studiem existenţa limitei unui şir pentru o clasă destul de restrânsă de şiruri.

Din acest motiv, în cele ce urmează, vom generaliza criteriile de mai sus.

Teorema 1: Fie (a_n) un şir de numere pozitive şi (b_n), un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty, (b_n > 0, \forall n \in N^*)$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = x$, atunci avem :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R_+, \text{dacă } x \in R \text{ şi şirul } (y_n), \text{cu } y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}, \text{ este convergent} \\ 0, \text{dacă x} > 0 \text{ şi şirul } (y_n), \text{diverge la } +\infty \\ +\infty, \text{dacă x} < 0 \text{ şi şirul } (y_n), \text{diverge la } +\infty \end{cases}$$

Pentru demonstrație vom folosi următorul rezultat :

Fie două şiruri $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi. Dacă avem $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in (0,\infty)$ sau $(\exists) a,b$ cu $0 < a < b$, astfel încât $\frac{x_n}{y_n} \in [a,b], (\forall) n \geq 1$, atunci şirurile $\sum_{k=1}^{n} x_k$ şi $\sum_{k=1}^{n} y_k$, au aceeaşi natură, adică sunt simultan convergente sau simultan divergente.

Demonstrația teoremei :

Fie $b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = x_n, \forall n \in N^*$ (1)

Din (1) rezultă că $a_{n+1} = \frac{a_1}{\left(1+\frac{x_1}{b_1}\right)\cdot\left(1+\frac{x_2}{b_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{x_n}{b_n}\right)} =$

$$= \frac{a_1}{e^{\ln\left(1+\frac{x_1}{b_1}\right)+\ln\left(1+\frac{x_2}{b_2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{x_n}{b_n}\right)}}, \forall n \in N^*.$$

Avem mai multe cazuri :

I. În cazul când $x \in R_+$, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x_n}{b_n}\right)}{\frac{1}{b_n}} = x$, rezultă că şirul (z_n) cu $z_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x_k}{b_k}\right)$ are aceeaşi natură cu şirul $(y_n), y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$.

II. Dacă $x \in R_-$, atunci $1+\frac{x_n}{b_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$, unde $\alpha_n = -\frac{x_n}{b_n + x_n}, \forall n \in N^*$. Deoarece $a_{n+1} = \frac{a_1}{e^{-\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\alpha_k)}}, \forall n \in N^*$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\alpha_n)}{\frac{1}{b_n}} = x$, rezultă că şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\alpha_k)\right)$, are aceeaşi natură cu şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}\right) \Rightarrow$ şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x_k}{b_k}\right)\right)$ diverge la $+\infty$, şi deci $a_n \to 0$.

III.Dacă $x=+\infty$ *şi şirul* $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}\right)$ *diverge la* $+\infty$,cum

$x_n \to +\infty, (\exists) n_0 \in N, astfel\ încat\ x_n \geq 1, (\forall) n > n_0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{x_k}{b_k}\right) \geq \ln\left(1+\frac{1}{b_k}\right), (\forall) k \geq n_0$.Deoarece şirul

$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{b_k}\right)$ are aceiaşi natură cu şirul $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}\right) \Rightarrow$ şirul $\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{x_k}{b_k})\right)$ diverge la $+\infty$,şi deci, $a_n \to 0$.

IV.Dacă $x \to -\infty$ rezultă că există $N_0 \in N$,astfel încat $\ln(1+\alpha_n) \geq \ln\left(1+\frac{1}{b_n}\right), (\forall)\ n \geq N_0$ deoarece $1+\alpha_n \geq 1+\frac{1}{b_n} \Leftrightarrow \alpha_n b_n \geq 1 \Rightarrow \frac{-x_n b_n}{b_n+x_n} \geq 1 \Leftrightarrow -x_n \geq \frac{b_n}{b_n+1}$ ceea ce este adevărat .

Deoarece şirul $\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{b_k}\right)\right)$ are aceeaşi natură cu şirul $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}\right)$,adică diverge la $+\infty$, rezultă că $\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\alpha_k)\right) \to \infty$, şi deci $a_n \to +\infty$.

V.Dacă $x=0$ şi şirul y_n este convergent ,atunci, deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{x_n}{b_n})}{\frac{x_n}{b_n}}=1$, rezultă că şirul

$z_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{x_k}{b_k})$ are aceeaşi natură cu şirul $\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{b_k}$ care este convergent , fiind şir Cauchy$\Rightarrow$şirul a_n este şir convergent.

Din demonstraţia dată, se observă că are loc şi:

Teorema 2:

Fie $(a_n)_{n\in N^*}$ şi $(b_n)_{n\in N^*}$, două şiruri de numere pozitive cu $\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$.

Dacă notăm $x_n=b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$, atunci avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R}_+,\ \text{dacă există } a,b \in \mathbb{R}, \text{ cu } a<b, \text{ astfel încât } x_n \in [a,b], \forall n\ge 1 \text{ şi şirul } y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}, \\ \text{este convergent} \\ 0,\ \text{dacă există } a \in \mathbb{R}, \text{ astfel încât } a>0 \text{ şi } x_n \ge a, \forall n \ge 1 \text{ şi şirul } y_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k} \to \infty \\ +\infty,\ \text{dacă există } a\in\mathbb{R}, a<0, \text{astfel încât } x_n \le a, \forall n\ge 1 \text{ şi şirul } y_n \to \infty \end{cases}$$

Teorema3: Fie $(a_n)_{n\ge 0}$ un şir de numere reale pozitive şi $(b_n)_{n\ge 0}$ un şir de numere pozitive cu $b_n \to \infty$.

Dacă $\lim_{n\to\infty} b_n\left(a_n^{\frac{1}{b_n}} - 1\right) = x$,atunci avem:

$$\lim_{n\leftrightarrow\infty} a_n = \begin{cases} e^x, \textit{dacă } x \in R \\ \infty, \textit{dacă } x = +\infty \\ 0, \textit{dacă } x = -\infty \end{cases}$$

Demonstrație :

Fie $x_n = b_n\left(a_n^{\frac{1}{b_n}} - 1\right), (\forall) n \in N$. Avem mai multe cazuri:

I.Dacă x=+∞ ,atunci $a_n = \left(1+\frac{x_n}{b_n}\right)^{b_n} \ge 1 + b_n \cdot \frac{x_n}{b_n} = 1 + x_n (\forall) n \ge n_0$, unde $n_0 \in N$, astfel încat $b_n>1$ $(\forall) n \ge n_0$.

Cum $x_n \to \infty \Rightarrow a_n \to \infty$.

II.Dacă $x \in R^*$,atunci $a_n = \left(1+\frac{x_n}{b_n}\right)^{\frac{b_n}{x_n}\cdot x_n} \to e^x$.

III.Dacă $x=0$,atunci notând $A = \{n \in N / x_n = 0\}$ şi B=N-A,avem:

a)A finită$\Rightarrow a_n \to e^0 = 1$

b)A infinită$\Rightarrow a_{k_n} \to 1 \Rightarrow$ *şi* $a_{r_n} \to 1 \Rightarrow a_n \to 1$unde $A = \{k_1, k_2, ...\}$ *şi* $B = \{r_1, r_2, .., r_{n,...}.\}$ *cu* $k_1 < k_2 < ....; r_1 < r_2 < ...$

IV.Dacă $x = -\infty$,cum $a_n>0$ $\Rightarrow x_n>-b_n$,$(\forall)$ $n\in N \Rightarrow (\exists)$ $k\in N$,astfel încat $0 < \frac{x_n}{-b_n} = y_n \le 1, (\forall)$ n$\ge$k,de unde ,

$$0 \le a_n = \left(1+\frac{x_n}{b_n}\right)^{b_n} = (1-y_n)^{b_n} \le \frac{1}{(1+y_n)^{b_n}} \le \frac{1}{1+b_n y_n}, (\forall)\ n \ge k.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+b_n y_n}=0$ din teorema şirurilor încadrate $\Rightarrow a_n \to 0$.

Aplicații

Aplicația 1 : Fie a,b,c,d , patru numere pozitive şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $\alpha_k=\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{ak^\alpha+b}{ck^\alpha+d}$, unde $\alpha\in(0,\infty)$. Studiați convergența şirului (a_n).

Rezolvare:

Facem raportul $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a(n+1)^\alpha+b}{c(n+1)^\alpha+d}\to\dfrac{a}{c}$. Din criteriul raportului, obținem că pentru $\begin{cases} a<c \Rightarrow \text{şirul } a(n) \text{ este convergent la } 0 \\ a>c \Rightarrow \text{şirul } a(n) \text{ este divergentă la } +\infty \end{cases}$.

Rămâne de studiat cazul când $a=c$. În acest caz aplicăm *Teorema 1*, enunțată mai sus şi obținem $(n+1)^\alpha\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\dfrac{(n+1)^\alpha(d-b)}{\left(a(n+1)^\alpha+b\right)}\to\dfrac{d-b}{a}$. Se disting două cazuri :

I. $d=b$, caz în care evident şirul $a_n\to 1$.

II. $d\neq b$, şi în acest caz avem două posibilități :

Dacă $\alpha>1$ şirul (a_n), converge la un număr pozitiv

Dacă $\alpha\in(0,1]\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}0, \text{ dacă } d>b\\ \infty, \text{ dacă } d<b\end{cases}$

Aplicația 2 .Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}$

(problema 24408 G.M. 11 / 2000)

Rezolvare :

Observăm că

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2k+2)}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}-\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2k}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\right)=\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n+2)}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}-2$$

Dar din aplicația precedentă

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n+2)}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}=+\infty.$$

Aplicația 3 : Fie $\alpha, \beta \in R$ cu $\alpha \cdot \beta > 0$. Studiați convergența șirului $(a_n)_{n\geq 1}$,cu $a_n = \left[1 + \frac{\left|\sin\left(n^\beta \cdot \beta\right)\right|}{n^\alpha} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n$.

Rezolvare:

Pentru rezolvarea acestui exercițiu aplicăm *Teorema 3* , enunțată mai sus şi pentru aceasta observăm că şirul $n\left(\sqrt[n]{a_n} - 1\right) = \frac{\left|\sin\left(n^\beta \cdot \alpha\right)\right|}{n^\alpha} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 0$ dacă $\alpha > 0$. Conform teoremei rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

În cazul în care $\alpha < 0, \beta < 0$ cum $\frac{\left|\sin\left(n^\beta \cdot \alpha\right)\right|}{n^\alpha} = \left|\frac{\sin\left(n^\beta \cdot \alpha\right)}{n^\beta \cdot \alpha}\right| \cdot n^{\beta-\alpha}|\alpha|$, obținem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a_n} - 1\right) = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } \beta > \alpha \\ 0, \text{ dacă } \beta < \alpha \\ |\alpha|, \text{ dacă } \alpha = \beta \end{cases}.$$

Prin urmare, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \alpha > 0 \text{ sau } \alpha, \beta < 0, \text{ cu } \beta < \alpha \\ +\infty, \text{ dacă } 0 > \beta > \alpha \\ e^{|\alpha|}, \text{ dacă } \beta = \alpha < 0 \end{cases}$.

Aplicația 4: Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n \to \infty$ şi $a_n = \frac{P(x_1)}{Q(x_1)} \cdot \frac{P(x_2)}{Q(x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{P(x_n)}{Q(x_n)}$,unde $P(x) = x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0, k \in \mathbb{N}^*$, $Q(x) = x^k + \beta_{k-1}x^{k-1} + \beta_{k-2}x^{k-2} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0, k \in \mathbb{N}^*$, sunt funcții polinomiale distincte de grad k. Studiați convergența şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

.

Rezolvare :

Fie $b_n = x_{n+1}^{k-r}$, unde $r = \max\left\{p \in N, 0 \leq p < k \middle| \alpha_p \neq \beta_p \right\}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} b_n\left(\frac{Q(x_{n+1})}{P(x_{n+1})} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} b_n\left(\frac{Q(x_{n+1}) - P(x_{n+1})}{P(x_{n+1})}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{Q(x_{n+1}) - P(x_{n+1})}{x_{n+1}^r}}{\frac{P(x_{n+1})}{x_{n+1}^k}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Q(x_{n+1}) - P(x_{n+1})}{x_{n+1}^r}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(x_{n+1})}{x_{n+1}^k}} = \beta_r - \alpha_r .$$

Folosind *Teorema 1* , enunțată mai sus, rezultă că dacă şirul $y_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{x_p^{k-r}}$, este convergent, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, este convergent, iar dacă şirul y_n este divergent, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, \text{dacă } \beta_r > \alpha_r \\ +\infty, \text{dacă } \beta_r < \alpha_r \end{cases}$.

Probleme propuse

1. Studiați convergența şirurilor de mai jos, şi precizați, în fiecare caz când $(\exists)\lim_{n\to\infty} a_n$ şi când , $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$, unde $A = \{0\}$ sau $A = \{+\infty\}$ sau $A = R_+$.

2. Să se studieze natura sirului de termeni general.

$$a_n = \frac{\alpha^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(\alpha^2+1)(\alpha^4+1)...(\alpha^{2n}+1)}; \alpha > 0$$

(problema 18388 G.M. nr 8 / 1980)

3. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $x_n = \frac{a^n C_{2n-2}^{n-1}}{n}$ este convergent $\Leftrightarrow |a| \leq \frac{1}{4}$

(problema 20442 G.M. nr 4 / 1985)

4. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{a(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})...(a+\sqrt{n})}{b(b+\sqrt{1})(b+\sqrt{2})...(b+\sqrt{n})}$, unde $a, b \in R_+^*$

(problema 20957 G.M. nr. 12 / 1986)

5. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}, x_1 = a \in R, x_{n+1} - x_n = \log_b(b^{x_n} + b); b > 1, n \in N^*$. Calculați $\lim_{n\to\infty} \frac{b^{x_n}}{(b^{x_1}+1)(b^{x_2}+1)...(b^{x_{n-1}}+1)}$

(O.M. etapa județeană , Vaslui 2000)

Bibliografie:

[1] Gazeta Matematică nr.3/1980,pag.97-100
[2] Anca Precupanu,Bazele analizei matematice,Editura Universității "Al.I.Cuza",1993.

Profesor,C.N.I."Spiru Haret", Str.Zorilor,nr.17, Suceava