CREAŢII MATEMATICE SERIA B
ARTICOLE ŞI STUDII ŞTIINŢIFICE

ISSN online 2246-9451

Generalizări ale formulei a doua de medie pentru integrala definită

Prof. Ion Bursuc

Motto: Şi Dumnezeu i-a binecuvântat, zicând: "Creşteţi şi vă înmulţiţi şi umpleţi pământul şi-l supuneţi; şi stăpâniţi peste peştii mării, peste păsările cerului, peste toate animalele, peste toate vietăţile ce se mişcă pe pământ şi peste tot pământul!" Apoi a zis Dumnezeu: "Iată, vă dau toată iarba ce face sămânţă de pe toată faţa pământului şi tot pomul ce are rod cu sămânţă în el. Acestea vor fi hrana voastră.
(Facerea,cap.1,v.28,29)

Scopul acestui articol este de a prezenta unele variante ale formulei a doua de medie pentru integrala definită şi de a da unele generalizări ale ei, urmate de aplicaţii ce au fost publicate în unele reviste de specialitate.

A doua formulă de medie

Varianta I: Fie $f,g:[a,b]\to R$ două funcţii integrabile pe $[a,b]$ astfel încât g are semnul constant pe $[a,b]$. Atunci, există $\lambda\in[m,M]$, astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)dx=\lambda\int_a^b g(x)dx$,unde:

$$m=\inf\{f(x),\ x\in[a,b]\}\ \text{şi}\ M=\sup\{f(x),\ x\in[a,b]\}.$$

Varianta II: Fie $f,g:[a,b]\to R$ două funcţii integrabile pe $[a,b]$,astfel încât g are semnul constant pe $[a,b]$, iar funcţia f are proprietatea lui Darboux. Atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Pentru demonstraţia variantelor I şi II se poate consulta [1] şi [2].

Varianta III: Fie $f,g:[a,b]\to R$ două funcţii continue pe $[a,b]$ astfel încât g are semnul constant pe $[a,b]$. Atunci, există $c\in(a,b)$ astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Demonstraţie: Se observă că este un caz particular al variantei II.

Varianta IV: Fie $f,g:[a,b]\to R$ două funcţii integrabile pe $[a,b]$ astfel încât $\int_a^x g(t)dt\geq 0,(\forall)x\in[a,b],\ \int_x^b g(t)dt\geq 0,(\forall)x\in[a,b]$.

a)Dacă f este montonă, atunci există $\lambda\in[m,M]$, astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)dx=\lambda\int_a^b g(x)dx$,unde m=inf{f(x),x∈ $[a,b]$ },M=sup{f(x),x∈ [a,b]}.

b)Dacă f este monotonă şi are proprietatea lui Darboux, atunci există c∈ (a,b) astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)dx$ =f(c) $\int_a^b g(x)dx$.

Demonstrație: Se poate arăta ușor că pentru orice funcții integrabile f și g pe $[a,b]$ și pentru orice șir de diviziuni $\Delta_n : a = x_0^n < x_1^n < ... < x_{m_n}^n = b$ cu $\|\Delta_n\| \to 0$ avem $\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} f(\xi_k^n)\int_{x_k^n}^{x_{k+1}^n} g(x)dx$ unde $\xi_k^n \in [x_k^n, x_{k+1}^n]$, $k \in \{0,1,...,m_n-1\}$.

Dacă considerăm cazul când f este crescătoare, atunci, dacă notăm $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ putem scrie:

$$\sum_{i=0}^{m_n-1} f(x_i^n)\int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} g(x)dx = \sum_{i=0}^{m_n-1} f(x_i^n)\left(G(x_{i+1}^n) - G(x_i^n)\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{m_n-1} f(x_i^n)G(x_{i+1}^n) - \sum_{i=0}^{m_n-1} f(x_{i+1}^n)G(x_{i+1}^n) + f(x_{m_n}^n)G(x_{m_n}^n) \le f(b)G(b) =$$

$$= f(b)\int_a^b g(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx \le f(b)\int_a^b g(x)dx \ (1)$$

Pe de altă parte, dacă notăm $G_1(x) = \int_x^b g(t)dt$ atunci putem scrie :

$$\sum_{i=0}^{m_n-1} f(x_{i+1}^n)\int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} g(x)dx = \sum_{i=0}^{m_n-1} f(x_{i+1}^n)\left(G_1(x_i^n) - G_1(x_{i+1}^n)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m_n-1} f(x_{i+1}^n)G_1(x_i^n) - \sum_{i=0}^{m_n-1} f(x_i^n)G_1(x_i^n) + f(x_0^n)G_1(x_0^n) \ge$$

$$\ge f(x_0^n)G_1(x_0^n) = f(a)\int_a^b g(x)dx,$$

de unde deducem că $\int_a^b f(x)g(x)dx \ge f(a)\int_a^b g(x)dx$ (2).

Din (1) și (2), deducem rezultatele de la punctele a) și b).

Analog, se procedează în cazul în care f este descrescătoare.

Lemă: Fie funcțiile $f, g : I \to R$ cu proprietatea că pentru orice $a,b \in I$ cu $a < b$, funcțiile f și g sunt integrabile pe intervalul $[a,b]$, iar funcția f este derivabilă de n ori cu derivata de ordin $n \ge 1$ integrabilă pe $[a,b]$ $(\forall)\ a,b \in I$ *cu* $a < b$. Atunci avem :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)h_1(a) + ... + f^{(n-1)}(a)h_n(a) + \int_a^b f^{(n)}(x)h_n(x)dx,$$

unde $h_0(x) = g(x)$, $h_k(x) = \int_x^b h_{k-1}(t)dt\ (\forall)\ k \in \{1,...n\}$.

Demonstrație: Deoarece funcția g este integrabilă pe $[a,b]$, atunci pentru orice $k \ge 1$ funcția h_{k+1} este derivabilă și $h'_{k+1} = -h_k$. Integrând prin părți obținem:

$$\int_a^b f^{(k)}(x)h_k(x)dx = f^{(k)}(a)h_{k+1}(a) + \int_a^b f^{(k+1)}(x)h_{k+1}(x)dx\ (\forall) 1 \le k \le n-1.$$

Se observă că relația de mai sus are loc și pentru $k = 0$ (*a se vedea* [3]).

Prin urmare, avem:

$$\int_a^b f^{(k)}(x)h_k(x)dx = f^{(k)}(a)h_{k+1}(a) + \int_a^b f^{(k+1)}(x)h_{k+1}(x)dx\ (\forall) k \in \{0,1,...,n-1\} \ (3)$$

Sumând egalitățile din relația (3) scrise pentru k luând valori de la 0 până la $n-1$, obținem :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_a^b f^{(k)}(x)h_k(x)dx - \int_a^b f^{(k+1)}(x)h_{k+1}(x)dx\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)h_{k+1}(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)h_{k+1}(a) + \int_a^b f^{(n)}(x)h_n(x)dx.$$

Observația 1: Se observă că egalitatea din lema de mai sus are loc și dacă $a > b$.

Teoremă: Dacă funcțiile f și g îndeplinesc condițiile lemei și $h_n(x) \neq 0$, $(\forall) x \in (a,b)$, $n \geq 1$ atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)h_1(a) + ... + f^{(n-1)}(a)h_n(a) + f^{(n)}(c)\int_a^b h_n(x)dx$$

Demonstrație: Deoarece funcția h_n este continuă și $h_n(x) \neq 0$, $(\forall) x \in (a,b)$ rezultă că funcția h_n are semn constant pe $[a,b]$, și cum funcția $f^{(n)}$ are proprietatea lu Darboux, folosind formula de medie (varianta II) deducem că există $c \in (a,b)$ astfel încât $\int_a^b f^{(n)}(x)h_n(x)dx = f^{(n)}(c)\int_a^b h_n(x)dx$ și din lema precedentă rezultă egalitatea din teoremă.

Observația 2: Egalitatea din teorema de mai sus are loc și dacă $a > b$ (în acest caz $c \in (b,a)$)

Consecință: Dacă sunt indeplinite condițiile lemei și $(\exists) M > 0$, astfel încât $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M, (\forall) x \in [a,b]$ cu $n \in N^*$, și $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b |h_n(x)| dx = 0$, atunci:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(a)\cdot h_1(a) + ... + f^{(n-1)}(a)\cdot h_n(a)\right) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Aplicații

1. Fie $f : [-1,1] \to R$ o funcție derivabilă. Dacă $k \in N$, să se arate că există $c \in (-1,1)$ astfel încât: $\int_{-1}^1 x^{2k+1} f(x)dx = \frac{2}{2k+3} f'(c)$.

(G.M. nr.8/1985, problema 1, pag.297)

Soluție: Aplicând teorema de mai sus pentru funcțiile f și $g(x) = x^{2k+1}$ $(\forall) x \in [-1,1]$ *si* $n = 1$, deducem că există $c \in (-1,1)$ astfel încât:

$$\int_{-1}^1 x^{2k+1} f(x)dx = f(-1)\int_{-1}^1 x^{2k+1}dx + f'(c)\int_{-1}^1 (\int_x^1 t^{2k+1}dt)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 x^{2k+1} f(x)dx = \frac{2}{2k+3} f'(c).$$

2. Să se arate că:

a) $\int_0^2 x^\alpha \sin \pi x\, dx < 0, (\forall) \alpha \in R, \alpha > 0$;

b) $\int_0^2 x^\alpha \cos \pi x\, dx > 0, (\forall) \alpha \in R, \alpha > 1$;

c) $\int_0^2 x^\alpha \cos \pi x\, dx < 0, (\forall) \alpha \in (0,1)$.

(Problema 19720, din G.M. nr.5/1983)

Enunț modificat

Soluție: Aplicând lema pentru $f(x) = x^\alpha$, $(\forall) x \in [\varepsilon, 2]$ unde $0 < \varepsilon < 1$ și $g(x) = \sin \pi x, (\forall) x \in [\varepsilon, 2]$ obținem :

$$\int_\varepsilon^2 x^\alpha \sin \pi x dx = \varepsilon^\alpha \int_\varepsilon^2 \sin \pi x dx + \alpha \int_\varepsilon^2 t^{\alpha-1}\left(\int_t^2 \sin \pi x dx\right)dt < \varepsilon^\alpha \int_\varepsilon^2 \sin \pi x dx.$$

Dar, $\int_0^\varepsilon x^\alpha \sin \pi x dx < \varepsilon^\alpha \int_0^\varepsilon \sin \pi x dx$. Deci, $\int_0^2 x^\alpha \sin \pi x dx < \varepsilon^\alpha \int_0^2 \sin \pi x dx = 0$.

b) Deoarece $\alpha > 1$, sunt îndeplinite cerințele lemei pentru funcțiile: $f(x) = x^\alpha$, $g(x) = \cos \pi x, (\forall) x \in [0,2]$. Deci avem:

$$\int_0^2 x^\alpha \cos \pi x dx = f(0)\int_0^2 g(x)dx + \int_0^2 \alpha x^{\alpha-1}(\int_x^2 \cos \pi t dt)dx = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^2 x^{\alpha-1} \sin \pi x dx > 0$$

c)

Considerăm funcțiile $f(x)=x^{\alpha}, g(x)=\cos\pi x, (\forall)x\in[\varepsilon,2]$ cu $\varepsilon\in(0,2)$. Folosind lema de mai sus deducem că: $\int_{\varepsilon}^{2}x^{\alpha}\cos\pi x dx=-\varepsilon^{\alpha}\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}+\frac{\alpha\varepsilon^{\alpha-1}}{\pi^2}(1-\cos\pi\varepsilon)+\int_{\varepsilon}^{2}\frac{\alpha(\alpha-1)}{\pi^2}x^{\alpha-2}(1-\cos\pi x)dx<$ $-\varepsilon^{\alpha}\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}+\frac{\alpha\varepsilon^{\alpha-1}}{\pi^2}(1-\cos\pi\varepsilon)+\int_{\varepsilon'}^{2}\frac{\alpha(\alpha-1)}{\pi^2}x^{\alpha-2}(1-\cos\pi x)dx$, $(\forall)0<\varepsilon<\varepsilon'<2$.(1)

Dar $\int_0^{\varepsilon}x^{\alpha}\cos\pi x dx<\varepsilon^{\alpha}\int_0^{\varepsilon}\cos\pi x dx=\varepsilon^{\alpha}\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi},(\forall)0<\varepsilon<\varepsilon'<\frac{1}{2}$. (2)

Adunând egalitățile (1) și (2) și apoi trecând la limita pentru ε→0 obținem :

$$\int_0^2 x^{\alpha}\cos\pi x dx\le\int_{\varepsilon'}^{2}\frac{\alpha(\alpha-1)}{\pi^2}x^{\alpha-2}(1-\cos\pi x)dx<0 .$$

3. Fie $f:[0,2]\to R]$ o funcție de trei ori derivabilă, având $x_0=1$ punct de extrem relativ și $f^{(3)}(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,2]$. Să se arate că :

$$\int_1^2 f(x)dx\ge\int_0^1 f(x)dx.$$

(Problema 7, pag.217 din G.M. nr.6/1987)

Soluție : Folosind teorema pentru $g=1$, obținem:

$\int_1^2 f(x)dx=f(1)\int_1^2 1dx+f'(1)\int_1^2(2-x)dx+f''(c_1)\int_1^2\frac{(2-x)^2}{2}dx$, unde $c_1\in(1,2)$ și $\int_0^1 f(x)dx=f(1)\int_0^1 1\,dx-f'(1)\int_0^1 xdx+f''(c_2)\int_0^1\frac{x^2}{2}dx$, $c_2\in(0,1)$. Deoarece $x_0=1$ este punct de extrem, deducem că $f'(1)=0$ și deci, din relațiile de mai sus deducem că :

$$\int_1^2 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}[f''(c_1)-f''(c_2)].$$

Dar deoarece $f^{(3)}(x)\ge 0,(\forall)x\in[0,2]$ rezultă că funcția f'' este crescătoare și cum $c_1>c_2$, deducem că $f''(c_1)\ge f''(c_2)$. Deci,

$$\int_1^2 f(x)dx\ge\int_0^1 f(x)dx.$$

4. Fie șirul $x_n=e-1-\frac{1}{1!}-...-\frac{1}{n!}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$. Arătați că : $\lim_{n\to\infty}(x_0+x_1+...+x_n)=e.$

Soluție: Aplicând lema pentru funcțiile $f(x)=e^{-x}$, $(\forall)x\in[0,1]$, $g(x)=e^{x}$, $(\forall)x\in[0,1]$ obținem:

$$\int_0^1 e^{-x}e^{x}dx=e^{-1}\int_0^1 e^{x}dx+e^{-1}\int_0^1(e^{x}-1)dx+...+e^{-1}\int_0^1\left(e^{x}-1-...-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)dx+$$

$$+\int_0^1 e^{-x}\left(e^{x}-1-...-\frac{x^{n}}{n!}\right)dx \text{ . Dar}$$

$$0\le\left|\int_0^1 e^{-x}\left(e^{x}-1-...-\frac{x^{n}}{n!}\right)dx\right|\le\int_0^1\left(e^{x}-1-...-\frac{x^{n}}{n!}\right)dx=e-1-\frac{1}{1!}-...-\frac{1}{(n+1)!}\to 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(x_0+x_1+...+x_n)=e .$$

Bibliografie :

[1] Jenică Crânganu, *Asupra formulelor de medie integrală și aplicații ale lor*, R. M.G. nr.12-13/1994, pag 18

[2] Marius Burtea, *Elemente de analiză matematică*, editura Carminis, pag. 278

[3] Bursuc Ion, *Asupra unor teoreme de analiză matematică*, G.M. nr. 4/ 1991, pag. 126