CREAŢII MATEMATICE SERIA B
ARTICOLE ŞI STUDII ŞTIINŢIFICE

ISSN online 2246-9451

Rafinări ale inegalității mediilor

de **Ion Bursuc**

Motto: Atunci, luând Domnul Dumnezeu ţărână din pământ, a făcut pe om şi a suflat în faţa lui suflare de viaţă şi s-a făcut omul fiinţă vie. Apoi Domnul Dumnezeu a sădit o grădină în Eden, spre răsărit, şi a pus acolo pe omul pe care-l zidise.
(Facerea,cap.2,v.7,8)

Încă din clasele gimnaziale elevii cunosc şi ştiu să folosească inegalităţile mediilor :

$\max\{a,b\} \geq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b} \geq \min\{a,b\}$, pentru orice $a,b>0$. În general :

$$\max\{a_1,a_2,...,a_n\} \geq \sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \geq$$

$\min\{a_1,a_2,...a_n\}, (\forall) a_1,a_2,...,a_n>0$, unde $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$.

În cele ce urmează, voi întări o parte dintre aceste inegalităţi, după care voi da unele aplicaţii din diferite domenii ale matematicii.

Propoziţia 1.

a) Arătaţi că, pentru orice $a,b>0$, avem : $\dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)} \leq \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \dfrac{(a-b)^2(a+b)}{2a^2+2b^2+12ab}$.

b) Arătaţi că, pentru orice $a,b>0$, avem :

$$\frac{(a-b)^2}{4(a+b)} + \frac{(a-b)^4}{4(a+b)(3a^2+3b^2+10ab)} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} + \frac{(a-b)^4}{4(a+b)(a^2+b^2+14ab)}$$

Demonstraţie:

a) Se obţine uşor din relaţia $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(a-b)^2}{4\left(\dfrac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\right)}$ şi inegalităţile mediilor.

b) Deoarece $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} - \dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)} = \dfrac{\left(\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)} - \sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)} + \sqrt{ab}\right)}{\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)} + \sqrt{ab}}$

$$= \frac{(a-b)^4}{16(a+b)^2\left(\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)} + \sqrt{ab}\right)} \geq \frac{(a-b)^4}{16(a+b)^2\left(\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)} + \dfrac{a+b}{2}\right)}$$

$= \frac{(a-b)^4}{4(a+b)(3a^2+3b^2+10ab)}$, de unde rezultă partea stângă a inegalității din enunț.Analog,

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} - \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \le \frac{(a-b)^4}{16(a+b)^2\left(\frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} + \frac{2ab}{a+b}\right)} = \frac{(a-b)^4}{4(a+b)(a^2+b^2+14ab)}$, de unde rezultă

şi partea dreaptă a dublei inegalități din enunț.

Propoziția 2. Dacă a,b,c>0 şi min{a,b,c}=m, max{a,b,c}=M , atunci avem :

$$\frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{9(a+b+c)^2} + \frac{m^5}{324M^8}S^2 \le \frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \le \frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{9(a+b+c)^2} + \frac{M^5}{324m^8}S^2,$$

unde $S = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

Demonstrație : Dacă notăm $E = \frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} - \frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{9(a+b+c)^2}$, atunci putem scrie

$$E = \frac{\left(\frac{a+b+c}{3} - \frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{9(a+b+c)^2}\right)^3 - abc}{\left(\frac{a+b+c}{3} - \frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{9(a+b+c)^2}\right)^2 + \left(\frac{a+b+c}{3} - \frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{9(a+b+c)^2}\right)\cdot\sqrt[3]{abc} + \left(\sqrt[3]{abc}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left((a+b+c)^3 - 27abc\right)^2 [8(a+b+c)^3 + 27abc]}{9(a+b+c)^2 x^2 + 81(a+b+c)^4 x \cdot \sqrt[3]{abc} + 9^3(a+b+c)^6 \cdot \sqrt[3]{a^2b^2c^2}} =$$

$$= \frac{\left((7a+b+c)(b-c)^2 + (a+7b+c)(a-c)^2 + (a+b+7c)(a-b)^2\right)^2 \left(8(a+b+c)^3 + 27abc\right)}{36\left((a+b+c)^2 x^2 + 9(a+b+c)^4 \cdot \sqrt[3]{abc} \cdot x + 81(a+b+c)^6 \sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)} = \frac{E_1}{E_2},$$ unde am notat

$x = 2(a+b+c)^3 + 27abc$. Deoarece $3 \cdot 9^4 m^5 S^2 \le E_1 \le 3 \cdot 9^4 M^5 S^2$ şi

$108 \cdot 9^5 m^8 \le E_2 \le 108 \cdot 9^5 M^8$, deducem că $\frac{m^5 S^2}{324 \cdot M^8} \le E \le \frac{M^5 S^2}{324 \cdot m^8}$.

Asemănător ca în demonstrațiile anterioare, se poate arăta următorul rezultat :

Propoziția 3. Pentru oricare două numere reale strict pozitive *a* şi *b* avem:

a) $\frac{(a-b)^2(a+b)}{5a^2+5b^2+6ab} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} \le \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}$;

(Problema O.G:39,G.M.,nr. 1/1987,autor, Ion Bursuc)

b) $\frac{(a-b)^2}{4(a+b)} - \frac{(a-b)^4}{4(a+b)(5a^2+5b^2+6ab)} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} \le$

$\le \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} - \frac{(a-b)^4}{8(a+b)(3a^2+3b^2+2ab)}$.

Fie $x, y > 0$ şi $a_1 = \min(x,y), a_2 = \frac{2xy}{x+y}$, $a_3 = \sqrt{xy}$, $a_4 = \frac{x+y}{2}$

$a_5 = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, $a_6 = \max(x,y)$.Observăm că $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6$ .Pentru început arătăm următoarea:

Propoziția 4.

a) $a_6 - a_5 \ge a_2 - a_1$; **b)** $a_6 - a_5 \ge a_5 - a_4$; **c)** $a_4 - a_3 \ge a_5 - a_4$;

d) $a_5 - a_4 \ge a_3 - a_2$

Soluție Studiem cazul când $x > y$,deoarece în cazul $x < y$ se procedează asemănător,iar pentru $x = y$ are loc egalitate.

a) $a_2 - a_1 \le a_6 - a_5 \Leftrightarrow \frac{2xy}{x+y} - \min(x,y) \le \max(x,y) - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{2xy}{x+y} \le x + y -$

$-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \le \frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} \Leftrightarrow \frac{\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{4}}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2}} \le \frac{(x-y)^2}{2(x+y)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{4\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2}\right)} \le \frac{(x-y)^2}{2(x+y)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2} \ge \frac{x+y}{2}$ (adevărată).

b) $a_6 - a_5 \ge a_5 - a_4 \Leftrightarrow \max(x,y) - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \ge \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \ge \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \le \frac{|x-y|}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{4}}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2}} \le \frac{|x-y|}{4} \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{4\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2}\right)} \le \frac{|x-y|}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

$+ \frac{x+y}{2} \ge |x-y|$, inegalitate adevărată , deoarece $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2} \ge$

$\ge \frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} = x + y \ge x - y = |x-y|$.

c) $a_4 - a_3 \ge a_5 - a_4 \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \ge \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2} \ge$

$\ge \frac{(x-y)^2}{4\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2}\right)} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2}\right) \ge \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2} \ge \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{2}$ (inegalitate adevărată).

d) $a_5 - a_4 \ge a_3 - a_2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy} - \frac{2xy}{x+y} \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{4\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2}\right)} \ge$

$\ge \sqrt{xy} \cdot \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{x+y} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{4\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x+y}{2}\right)} \ge \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{4\sqrt{xy}} \ge$

$$\geq \frac{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{x+y}{2}}{x+y} \Leftrightarrow \frac{x+y+2\sqrt{xy}-4\sqrt{xy}}{4\sqrt{xy}} \geq \frac{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\frac{x+y}{2}}{x+y} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{4\sqrt{xy}} \geq$$

$$\frac{(x-y)^2}{4(x+y)\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{x+y}{2}\right)} \Leftrightarrow (x+y)\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$$ ceea ce rezultă din inegalitățile $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ și $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{x+y}{2} \geq \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{2}$.

Propoziția 5 Arătați că :

a) Cel mai mic $a>0$ pentru care avem

$$a\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{x+y}{2}-\frac{2xy}{x+y},\ (\forall)\ x,y>0 \quad \text{este} \quad a=1+\sqrt{2}$$

b) Cel mai mare $b>0$ pentru care avem:

$$b\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{x+y}{2}-\frac{2xy}{x+y},\ (\forall)\ x,y>0 \quad \text{este} \quad b=2$$

c) Cel mai mic $c>0$ pentru care avem:

$$c\left(\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right) \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\frac{x+y}{2},\ (\forall)\ x,y>0 \quad \text{este} \quad c=1$$

d) Cel mai mare $d>0$ pentru care avem:

$$d\left(\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right) \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\frac{x+y}{2},\ (\forall)\ x,y>0 \quad \text{este} \quad d=\sqrt{2}-1$$

Soluție

a) Inegalitatea din enunț se scrie astfel: $a\dfrac{\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{(x+y)^2}{4}}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{x+y}{2}} \geq \dfrac{(x+y)^2-4xy}{2(x+y)}$

$$(\forall)\ x,y>0 \Leftrightarrow \frac{a(x-y)^2}{4\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{x+y}{2}\right)} \geq \frac{(x-y)^2}{2(x+y)},(\forall)\ x,y>0 \Leftrightarrow \frac{a}{2}(x+y) \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{x+y}{2},(\forall)x,y>0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{2}(x+y) \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},(\forall)x,y>0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a-1)^2}{4}(x+y)^2 \geq \frac{x^2+y^2}{2},(\forall)x,y>0 \Leftrightarrow (a-1)^2(x+y)^2 \geq 2x^2+2y^2,(\forall)x,y>0$$

$\Leftrightarrow (a-1)^2-1 \geq \dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2},(\forall)\ x,y>0$ de unde obținem că cel mai mic a este $a=1+\sqrt{2}$

b) Asemănător ca la punctul a) relația dată se scrie astfel:

$(b-1)^2-1 \leq \dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2},(\forall)\ x,y>0$. Se observă că cel mai mare b cu această proprietate este $b=2$

c)Inegalitatea din enunț se scrie astfel: $\dfrac{c\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2}\geq$

$$\frac{(x-y)^2}{4\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{x+y}{2}\right)},(\forall)x,y>0 \Leftrightarrow 2c\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{x+y}{2}\right)\geq\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$$

$$(\forall)x,y>0 \quad \Leftrightarrow \quad c-1\geq -\frac{2\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\sqrt{xy}\right)}{x+y+2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}},\ (\forall)\ x,y>0 \ \Rightarrow \ c_{\min}=1$$

d)Asemănator ca la punctual c) relația dată se scrie

$$d\leq\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+y+2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}},(\forall)x,y>0\Leftrightarrow\frac{1}{p}\leq\frac{k^2+1+2k}{k^2+1+2\sqrt{\frac{k^4+1}{2}}},(\forall)k>0 \qquad \textbf{(1)}$$

Am notat $d=\dfrac{1}{p}$ și $\dfrac{x}{y}=k^2$.Relația **(1)** se scrie: $k^2+1+2\sqrt{\dfrac{k^4+1}{2}}\leq$

$pk^2+p+2pk,(\forall)k>0 \ \Leftrightarrow 2\left(k^4+1\right)\leq\left((p-1)k^2+2pk+p-1\right)^2,(\forall)k>0$ .Se observă că cel mai mic $p>0$ cu această proprietate este $p=1+\sqrt{2}$,de unde deducem că $d_{\max}=\sqrt{2}-1$

Propoziția 6

a) Arătați că dacă $x_1,x_2,....,x_n>0$,atunci are loc dubla inegalitate:

$$\frac{2\left(\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)}{n\left(4\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2\right)}\leq\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+....+x_n^2}{n}}-\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}\leq$$

$$\leq\frac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2}{2n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}.$$

b) Arătați că dacă $x_1,x_2,....,x_n>0$,atunci are loc dubla inegalitate:

$$\frac{S^n-n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n}{n^2S^{n-1}}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\leq\frac{\left(S^n-n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n\right)\cdot S}{n^{n+2}\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n},$$

unde S= $x_1+x_2+\cdots+x_n$.

c) Arătați că dacă $x_1,x_2,....,x_n>0$,atunci are loc dubla inegalitate:

$$\frac{S^n-n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n}{n^2S^{n-1}}+\frac{S_1^n-x_1\cdot x_2\cdots x_n}{n\cdot S_1^{n-1}}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\leq$$

$$\leq\frac{S^n-n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n}{n^2\cdot S^{n-1}}+\frac{\left(S_1^n-x_1\cdot x_2\cdots x_n\right)\cdot S_1}{n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n},$$

unde S= $x_1+x_2+\cdots+x_n$ și $S_1=\dfrac{(n-1)S^n+n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n}{n^2\cdot S^{n-1}}$.

Soluție: a) Deoarece

$$n\left(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+....+x_n^2}{n}}-\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}\right)=\sqrt{n\cdot\left(x_1^2+x_2^2+....+x_n^2\right)}-\left(x_1+x_2+....+x_n\right)=$$

$$=\frac{n\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2}{\sqrt{n\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2}+\sum_{k=1}^{n}x_k}=\frac{\sum_{1\le i<j\le n}\left(x_i-x_j\right)^2}{\sqrt{n\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2}+\sum_{k=1}^{n}x_k}\le\frac{\sum_{1\le i<j\le n}\left(x_i-x_j\right)^2}{2\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k} \qquad \textbf{(2)}$$

Pe de altă parte,avem:

$$n\cdot\left(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+....+x_n^2}{n}}-\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}\right)=\frac{\sum_{1\le i<j\le n}\left(x_i-x_j\right)^2}{\sqrt{n\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2}+\sum_{k=1}^{n}x_k}\ge$$

$$\ge\frac{2\left(\sum_{1\le i<j\le n}\left(x_i-x_j\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\sum_{1\le i<j\le n}\left(x_i-x_j\right)^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Din (2)şi (3) rezultă inegalitatea de demonstrat.

b) Observăm că putem scrie:

$$n\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\right)=x_1+x_2+\cdots+x_n-n\cdot\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=$$

$$\frac{S^n-n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n}{S^{n-1}+S^{n-2}\cdot nG+\cdots+S\cdot n^{n-2}\cdot G^{n-2}+n^{n-1}\cdot G^{n-1}}\le\frac{S^n-n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n}{n^n\cdot G^{n-1}}\le$$

$$\le\frac{\left(S^n-n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n\right)\cdot S}{n^{n+1}\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n} \qquad \textbf{(4)}$$

$$n\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\right)=\frac{S^n-n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n}{S^{n-1}+S^{n-2}\cdot nG+\cdots+S\cdot n^{n-2}\cdot G^{n-2}+n^{n-1}\cdot G^{n-1}}\ge$$

$$\ge\frac{S^n-n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n}{n\cdot S^{n-1}} \qquad \textbf{(5)}$$

Din (4) şi (5) obținem inegalitatea de demonstrat.

c)Procedând asemănător ca la b) avem:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}-\frac{S^n-n^n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n}{n^2S^{n-1}}=S_1-G=$$

$$=\frac{S_1^n-G^n}{S_1^{n-1}+S_1^{n-2}\cdot G+\cdots+S_1\cdot G^{n-2}+G^{n-1}}\ge\frac{S_1^n-G^n}{n\cdot S_1^{n-1}}=\frac{S_1^n-x_1\cdot x_2\cdots x_n}{n\cdot S_1^{n-1}} \qquad \textbf{(6)}$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\frac{S_1^n-G^n}{S_1^{n-1}+S_1^{n-2}\cdot G+\cdots+S_1\cdot G^{n-2}+G^{n-1}}\le$$

$$\le\frac{S_1^n-G^n}{n\cdot G^{n-1}}=\frac{\left(S_1^n-G^n\right)\cdot G}{n\cdot G^n}\le\frac{\left(S_1^n-x_1\cdot x_2\cdots x_n\right)\cdot S_1}{n\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n} \qquad \textbf{(7)}$$

Din (6) şi (7) obținem inegalitatea de demonstrat.

Aplicații:

1.Arătați că, pentru orice număr natural nenul n avem:

$n+\frac{1}{2}-\frac{1}{8n+3}<\sqrt{n^2+n}<n+\frac{1}{2}-\frac{1}{8n+4}$ şi calculați partea întreagă şi prima zecimală a numărului $\sqrt{2005\cdot2006}+\sqrt{2006\cdot2007}+...+\sqrt{3004\cdot3005}$.

Revista “Sinus” nr.2/2005,pag 75, autor,Bursuc Ion

Soluție:
Inegalitatea din enunț rezultă uşor din propoziția 1 pentru a=n şi b=n+1.
Din partea stângă a inegalității de mai sus, rezultă că:

$$N=\sqrt{2005\cdot 2006}+\sqrt{2006\cdot 2007}+\ldots+\sqrt{3004\cdot 3005}>(2005+2006+\ldots+3004)+$$
$$\frac{1000}{2}-\left(\frac{1}{8\cdot 2005+3}+\ldots+\frac{1}{8\cdot 3004+3}\right)>1000\cdot\frac{2005+3004}{2}+500-\frac{1000}{8\cdot 2005+3}>$$

$2505000-\frac{1}{10}$ **(8).** Din partea dreaptă a inegalității din enunț obținem:

$$N<1000\frac{2005+3004}{2}+500-\frac{1000}{8\cdot 3004+3}=2505000-\frac{1000}{24040}<2505000-\frac{1}{25}\qquad \textbf{(9)}$$

Din **(8)** şi **(9)** rezultă că $2504999+\frac{9}{10}<N<2505000$,de unde deducem că [N]=2504999 şi prima zecimală a lui N este 9.

2.Determinați numerele reale *a,b,c,* astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(an^2+bn+c-\sum\limits_{k=n}^{2n}\sqrt{k^2+k}\right)=0$

Bursuc Ion

Soluție:
Din inegalitatea: $k+\frac{1}{2}-\frac{1}{8k+3}<\sqrt{k^2+k}<k+\frac{1}{2}-\frac{1}{8k+4},(\forall)k\geq 1$,deducem că

$$\frac{3n(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{8k+3}<\sum_{k=n}^{2n}\sqrt{k^2+k}<\frac{3n(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{8k+4},n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow$$

$\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{8k+4}<\frac{(3n+1)(n+1)}{2}-\sum\limits_{k=n}^{2n}\sqrt{k^2+k}<\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{8k+3},n\in\mathbb{N}^*$. Deoarece

$\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{8(k+1)}<\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{8k+4}<\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{8k},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{8(k+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{8k}=\frac{1}{8}\ln 2$

obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{8k+4}=\frac{1}{8}\ln 2$ .Analog $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{8k+3}=\frac{1}{8}\ln 2$ şi deci

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(3n+1)(n+1)}{2}-\sum\limits_{k=n}^{2n}\sqrt{k^2+k}\right)=\frac{\ln 2}{8}$. Prin urmare, $a=\frac{3}{2},b=2,c=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{8}$.

3.a) Determinați primele două zecimale ale numărului $\sqrt[3]{n^3+0,6n^2}$,$n\in\mathbb{N}^*,n\geq 2$;
b)Determinați partea întreagă şi primele trei zecimale ale numărului :

$$\sqrt[3]{2005^3+2005^2}+\sqrt[3]{2006^3+2006^2}+\ldots+\sqrt[3]{2020^3+2020^2}.$$

Soluție: a) Înlocuind în propoziția 2 , a=b=n , $c=n+\alpha\ cu\ \alpha>0$, obținem :

$$n+\frac{\alpha}{3}-\frac{9\alpha^2 n+\alpha^3}{9(3n+\alpha)^2}-\frac{4\alpha^4(n+\alpha)^5}{324n^8}<\sqrt[3]{n^3+\alpha n^2}<n+\frac{\alpha}{3}-\frac{9\alpha^2 n+\alpha^3}{9(3n+\alpha)^2}-\frac{4\alpha^4 n^5}{324(n+\alpha)^8}\qquad \textbf{(10)}$$

Pentru $\alpha=0,6$ din relația **(10)** obținem $n+0,19<\sqrt[3]{n^3+0,6n^2}<n+0,2$,$(\forall)n\geq 4$

Pentru $n\in\{2,3\}$ avem $n+0,18<\sqrt[3]{n^3+0,6n^2}<n+0,19$,$(\forall)n\geq 4$.

Prin urmare, pentru $n\in\{2,3\}$ primele două zecimale ale numărului $\sqrt[3]{n^3+0,6n^2}$ sunt 1 şi 8, iar pentru $n\geq 4$ ele sunt 1 şi 9.

b)Sumând inegalitățile (10) pentru $\alpha=1$,obținem

$$\sum_{k=2005}^{2020}\left(\left(k+\frac{1}{3}\right)-\frac{9k+1}{9(3k+1)^2}-\frac{4(k+1)^5}{324k^8}\right)<$$

$$< \sum_{k=2005}^{2020} \sqrt[3]{k^3+k^2} < \sum_{k=2005}^{2020} \left(k+\frac{1}{3}-\frac{9k+1}{9(3k+1)^2}-\frac{4k^5}{324(k+1)^8} \right)$$ **(11).**Deoarece

$$\sum_{k=2005}^{2020} \left(\frac{9k+1}{9(3k+1)^2}+\frac{4(k+1)^5}{324k^8} \right) < \sum_{k=2005}^{2020} \left(\frac{1}{9k+3}+\frac{1}{k^3} \right) < \frac{16}{9\cdot 2005+3}+\frac{16}{2005^3} <$$

$$\frac{16}{18\cdot 1000}+\frac{1}{18\cdot 1000} < \frac{1}{1000}$$ din **(11)** ,deducem că, $$-\frac{1}{1000}+\sum_{k=2005}^{2020} \left(k+\frac{1}{3} \right) <$$

$$< \sum_{k=2005}^{2020} \sqrt[3]{k^3+k^2} < \sum_{k=2005}^{2020} \left(k+\frac{1}{3} \right) \Rightarrow 32205{,}332(3) < \sum_{k=2005}^{2020} \sqrt[3]{k^3+k^2} < 32205{,}(3).$$

Prin urmare $\left[\sum_{k=2005}^{2020} \sqrt[3]{k^3+k^2} \right] = 32205$ şi primele trei zecimale sunt 3 , 3 şi 2 .

4.Dacă ABC este un triunghi dreptunghic cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$,să se arate că:

$\sqrt{2}\cdot\left(AB+AC-\sqrt{AB\cdot AC}\right)\geq BC$ (G.M.nr.2/2007,autor,D.M.Bătinețu-Giurgiu)

Soluție:Cu notațiile cunoscute inegalitatea revine la:

$b+c\geq\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{bc}$,adică la inegalitatea c) din propoziția 4.

Probleme propuse :

1) Arătați că, pentru orice a,b>0 ,avem : $\frac{(a-b)^2(a+b)}{3a^2+3b^2+10ab}\leq\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\leq\frac{(a-b)^2\left(2a^2+2b^2+12ab\right)}{4(a+b)\left(a^2+b^2+14ab\right)}$

şi că aceste inegalități sunt mai tari decât cele din propoziția 1 punctul a).

2) Calculați : $\sqrt{2003\cdot 2006}+\sqrt{2006\cdot 2009}+\ldots+\sqrt{3002\cdot 3005}$ cu o zecimală exactă.

3) Determinați a,b,c$\in\mathbb{R}$, astfel încât : $\lim_{n\to\infty}\left(an^2+bn+c-\sum_{k=n}^{7n}\sqrt{k^2+3k} \right)=0.$

4) Cercetați dacă există a,b,c$\in\mathbb{R}$, astfel încât $\lim_{n\to\infty}\left(an^2+bn+c-\sum_{k=n}^{2n}\sqrt[3]{k^3+2k^2} \right)=0,$

şi în caz afirmativ, determinați a,b,c.

Bibliografie:

[1] : Gazeta Matematică nr.1/1987 ;
[2] : Revista „SINUS” nr. 2/2005 ;
[3]: Gazeta Matematică nr.2/2007.